UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-1-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Agosto de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**José Carlos Orozco de León**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Douglas Kenedy Román**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Aplicada 1**

Agosto de 2017 Primer parcial

NOTA: El examen se realiza durante el período de clase y tiene duración de 50 minutos.

Tema 1: 30 puntos.

Dada $f(t) = \begin{cases} 4 & sí \quad 0 \leq t < 2 \\ 0 & sí \quad t \geq 2 \end{cases}$

- **i)** Obtenga F(S) usando la transformada de Laplace POR DEFINICIÓN
- **ii)** Exprese f(t) con funciones tipo escalón
- **iii)** Calcule la Transformada de Laplace del inciso ii)

Tema 2: 20 puntos.

A) Obtenga F(s) sí:
$f(t) = t^2 e^{-3t}$

B) Obtenga F(s) sí:
$F(s) = 2sen^2(2t) - 12t^3$

Tema 3: 20 puntos.

Usando la Transformada de Laplace, obtenga la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales.

$y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = y'(0) = 1$

Tema 4: 15 puntos.

Obtenga f(t) sí:

$$F(s) = \frac{2s + 3}{s^2 - 2s + 10}$$

Tema 5: 15 puntos.

Obtenga f(t) sí:

$$F(s) = \frac{4e^{-2s} - 3}{s^2 + 4}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 30 puntos

No.	Explicación	Operatoria
i) 1.	La integral a utilizar es la siguiente	$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty} e^{-st}\int_0^{\infty} f(t)dt$
2.	Se procede a plantear la integral a utilizar, tomando en cuenta las condiciones iniciales	$\mathrm{F(s)}=\int_0^{2} 4e^{-st}dt+\int_2^{\infty} e^{-st}(0)dt$
3.	Simplificando las integrales, se obtiene la siguiente integral	$\mathrm{F(s)}=4\int_0^{2} e^{-st}dt$
4.	Integrando la función obtenemos	$\mathrm{F(s)}=4\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]$
5.	Integrales valuadas en los límites de 0 a 2	$F(s)=4\left[\frac{-e^{-2s}}{s}-\left(\frac{-e^{-s(0)}}{s}\right)\right]$
6.	**Respuesta**	$\boldsymbol{F(s)=4\left[\frac{-e^{-2s}}{s}+\frac{1}{s}\right]}$
ii) 1.	**Respuesta**	$\boldsymbol{f(t)=4-4\mathcal{U}(t-2)}$
iii) 1.	Se procede a calcular la Transformada de Laplace del inciso anterior	$\mathcal{L}\{4-4\mathcal{U}(t-2)\}$
2.	Se plantea la transformada de Laplace de cada uno de los términos y se toma el factor común 4 de ambas expresiones	$\mathcal{L}\{4\}-\mathcal{L}\{4\}e^{-2s}$ $4\mathcal{L}\{1\}-4\mathcal{L}\{1\}e^{-2s}$
3.	**Respuesta**	$\boldsymbol{f(t)=4\left[\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\right]}$

Tema 2: 20 puntos

INCISO A (10 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a operar la transformada de Laplace a la función	$f(t) = t^2 e^{-3t}$ $\mathrm{L}\{t^2\}_{s\to(s+3)}$
2.	La transformada de Laplace cuando $s \to (s+3)$ para la función es	$\mathrm{F(s)} = \frac{2!}{s^3}$
3.	**Respuesta**	$\boldsymbol{F(s) = \frac{2}{(s+3)^3}}$

INCISO B (10 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	La función a operar es	$f(t) = 2sen^2(2t) - 12t^3$
2.	Se utilizará un identidad trigonométrica	$sen^2(2t) = \frac{1 - cos4t}{2}$
3.	Se sustituye la identidad trigonométrica en la función a trabajar	$f(t) = 2\left(\frac{1 - cos4t}{2}\right) - 12t^3$
4.	Se simplifican algunos términos y se procede a operar la transformada de Laplace	$F(s) = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\left\{\cos(4t) - 12\mathcal{L}\{t^3\}\right\}$
5.	**Respuesta**	$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+16} - \frac{72}{s^4}}$

Tema 3: 20 puntos

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se opera la transformada de Laplace a la ecuación diferencial Se utilizan las condiciones iniciales del problema	$L\{y''\} - 4L\{y\} = 0$ $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4y(s) = 0$ $s^2Y(s) + 4y(s) = 1$
2.	Se despeja el término Y(s)	$Y(s)(s^2 + 4) = 1$ $Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)}$
3.	Se aplica la transformada inversa a la función y(s)	$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}$
4.	**Respuesta**	$= \boldsymbol{\frac{1}{2} sen2t}$

Tema 4: 15 puntos.

No	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1	Se descompone el denominador, completando cuadrados	$s^2 - 2s + 10 = s^2 - 2s + 1 + 10 - 1$ $= (s-1)^2 + 9$
2	Se procede a descomponer el numerador y formar una nueva expresión, de tal manera que obtengamos la misma expresión (s-1) en el numerador y en el denominador	$= \frac{s}{(s-1)^2 + 9}$
3	Se separa cada expresión, se plantea y se da solución a la transformada de Laplace	$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+9}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+9}\right\}$ $= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+9}\right\}_{s\to s-1} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}_{s\to s-1}$
4.	Se separan las expresiones para poder obtener la transformada de Laplace inversa de manera más directa	$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}_{s\to s-1} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}_{s\to s-1} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}_{s\to s-1}$
5.	**Respuesta**	$\boldsymbol{f(t) = 2e^t cos3t + \frac{5}{3}e^t sen3t}$

Tema 5 (15 puntos)

No.	Explicación	Operación
1.	Se separa la expresión en dos	$\frac{4e^{-2s}-3}{s^2+4} = \frac{4e^{-2s}}{s^2+4} - \frac{3}{s^2+4}$
2.	Se procede a operar el ejercicio por medio de transformada de Laplace inversa	$4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2+4}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$
3.	Se utilizan las funciones tipo escalón para poder desarrollar la transformada de Laplace inversa	$\frac{4}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}_{t\to t-2}^{\mu(t-2)} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$
4.	Se obtienen los resultados de la transformada de Laplace inversa, a manera de sustituir la función escalón	$2sen2t_{t\to t-2}^{\mu(t-2)} - \frac{3}{2}sen2t$
5.	**Respuesta**	**f(t)=** $\boldsymbol{2sen2(t-2)\mu(t-2) - \frac{3}{2}sen2t}$