UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-2-M-2-12-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Curso de vacaciones Diciembre 2017**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Diciembre 2017**
HORARIO DE EXAMEN:	**11:00 – 13:00**
AUXILIAR:	**Oscar Arias**
CLAVE:	**CLAVE-118-2-M-2-12-2017**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
MATEMÁTICA APLICADA 1

FACULTAD DE INGENIERÍA
SEGUNDO PARCIAL(temario B)

TEMA No 1 (14 puntos)

Un peso de 24 libras estira un resorte 3 pies. El peso se libera a partir del reposo 20 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y el movimiento resultante tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 11/4 veces la velocidad instantánea. Use la transformada de Laplace para encontrar la ecuación de movimiento.

TEMA No2 (20 puntos)

Hallar la transformada de:

a) $f(t) = t^6 U(t-3)$

b) $f(t) = \text{sen } t\, U\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

TEMA No 3 (36 puntos)

Hallar la transformada inversa de:

a) $F(S) = \frac{S}{(S^2+49)^2}$

b) $F(S) = \frac{e^{-3s}}{s^3(s+2)}$

c) $F(S) = \frac{e^{-3s}}{s^2+6s+15}$

TEMA No 4 (20 puntos)

Resolver:

a) $f(t) = 1 + t + \frac{8}{3}\int_0^t (t-\theta)^3 f(\theta)d\theta$

b) $\frac{dy}{dt} + 4y(t) + 16\int_0^t y(\theta)d\theta = 1 \qquad y(0) = 0$

TEMA No 5 (10 puntos)

Hallar la transformada de :

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq T < 4 \\ 0 & T \geq 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (14 puntos)

Un peso de 24 Libras estira un resorte 3 pies. El peso se libera a partir del reposo 20 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y el movimiento resultante tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 11/4 veces la velocidad instantánea. Use la transformada de Laplace para encontrar la ecuación de movimiento.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se definen los datos que se poseen que son el Peso, la fuerza de amortiguamiento y el estiramiento, así como las condiciones iniciales. Luego se calcula la masa y la constante de Hooke. La condición inicial para la posición es negativa ya que se libera arriba de la posición del reposo y que se deben convertir las pulgadas a pies para trabajar en el sistema inglés.	$W = 24\ Lb, \quad b = \frac{11}{4}, \quad x = 3\ Ft$ $m = \frac{W}{g} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} Slug, \quad K = \frac{F}{x} = \frac{24}{3} = 8\frac{N}{Ft}$ $x(0) = 20\ in = -\frac{5}{3} Ft$ $x'(0) = 0$
2.	Se plantea la ecuación diferencial que al sustituir valores y dividir entre la masa resulta la ecuación de modo estándar.	$mx'' + bx' + kx = f(t)$ $\frac{3}{4}x'' + \frac{11}{4}x' + 8x = 0$ $x'' + \frac{11}{3}x' + \frac{32}{3}x = 0$
3.	Se transforma cada término de la EDO para poder resolverla. La segunda derivada y primera derivada son de la siguiente manera estándar para luego sustituir en la ecuación.	$\mathcal{L}\{x''\} = s^2x(s) - sx(0) - x'(0)$ $\mathcal{L}\{x'\} = sx(0) - x(0)$ $s^2x(s) - sx(0) - x'(0) + \frac{11}{3}\left(sx(0) - x(0)\right) + \frac{32}{3}x(s) = 0$
4.	Sustituyendo los valores de las condiciones iniciales se agrupan términos que contengan $x(s)$ y se trasladan al segundo miembro de la ecuación los que no contengan dicho término. Para ambos miembros se obtiene el denominador común y se despeja $x(s)$	$x(s)\left[s^2 + \frac{11}{3}s + \frac{32}{3}\right] = -\frac{5}{3}s - \frac{55}{9}$ $x(s)\left[\frac{3s^2 + 11s + 32}{3}\right] = \frac{-15s - 55}{9}$ $x(s) = \frac{-\frac{5}{3}s - \frac{55}{9}}{s^2 + \frac{11}{3} + \frac{32}{3}}$
5.	Se completa al cuadrado el denominador y se separan las fracciones para transformar inversamente y obtener así la solución de la ecuación.	$x(s) = \frac{-\frac{5}{3}s - \frac{55}{9}}{s^2 + \frac{11}{3} + \frac{121}{36} + \frac{263}{36}} = \frac{-\frac{5}{3}s - \frac{55}{9}}{\left(s + \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{263}{36}}$ $\mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = -\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s + \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{263}{36}}\right\} - \frac{55}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{263}{36}}\right\}$
6.	Al realizar la trasformación inversa se obtiene.	$x(t) = -\frac{5}{3}e^{-\frac{11}{6}t}Cos\left(\frac{\sqrt{263}}{6}t\right) - \frac{55}{3\sqrt{263}}e^{-\frac{11}{6}t}Sin(\frac{\sqrt{263}}{6})t$

Ecuación de movimiento: $x(t) = -\frac{5}{3}e^{-\frac{11}{6}t}Cos\left(\frac{\sqrt{263}}{6}t\right) - \frac{55}{3\sqrt{263}}e^{-\frac{11}{6}t}Sin(\frac{\sqrt{263}}{6})t$

Tema 2 (20 puntos)

Hallar la transformada de:

A) $f(t) = t^6 u(t-3)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	La forma estándar de una transformada de Laplace del escalón unitario por otra función es la siguiente. Por lo tanto.	$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t-a)\}$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = 3^{-3s}\mathcal{L}\{(t+3)^6\}$
2.	Desarrollando el producto notable y transformando se obtiene la respuesta final.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = 3^{-3s}\mathcal{L}\{t^6 + 18t^5 + 135t^4 + 540t^3 + 1215t^2 + 1458t + 729\}$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = 3^{-3s}\left[\frac{720}{s^7} + \frac{2160}{s^6} + \frac{3240}{s^5} + \frac{3240}{s^4} + \frac{2430}{s^3} + \frac{1458}{s^2} + \frac{729}{s}\right]$

R./

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 3^{-3s}\left[\frac{720}{s^7} + \frac{2160}{s^6} + \frac{3240}{s^5} + \frac{3240}{s^4} + \frac{2430}{s^3} + \frac{1458}{s^2} + \frac{729}{s}\right]$$

B) $f(t) = Sen(t)U(t - \frac{\pi}{2})$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Para realizar la transformada de esta función se debe hacer que el seno tenga como argumento igual al del escalón unitario, para obtener esto se realiza una identidad trigonométrica de suma de ángulos	$Sent = sen\left(t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ $Sent = sen\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(t - \frac{\pi}{2})Sen(\frac{\pi}{2})$ $Sent = \cos(t - \frac{\pi}{2})$
2.	Sustituyendo en la función original se puede calcular su transformada.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)u(t - \frac{\pi}{2})$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}\{Cos(t)\}$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{s}{s^2+1}$

R./ $\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{s}{s^2+1}$

Tema 3: (36 puntos)

Hallar la Transformada Inversa de:

a) $F(s) = \frac{s}{(s^2+49)^2}$

No.	Explicación	Operación
1.	La función dada no puede transformarse inversamente por medio de fracciones parciales sino que se debe utilizar el teorema de convolución. La forma estándar de convolución es la siguiente.	$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+49}\right\} = Cos(7t)$ $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+49}\right\} = \frac{1}{7}Sen(7t)$
2.	Se sustituye en la forma estándar y se utilizan identidades trigonométricas para poder integrar	$\int_0^t Cos(7\tau) * \frac{1}{7}Sen(7\tau - 7t)d\tau$ $\frac{1}{7}\int_0^t Cos(7\tau) * [Sen(7t)Cos(7\tau) - Cos(7t)Sen(7\tau)]d\tau$ $\frac{1}{7}\left[Sen(7t)\left[\int_0^t \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Cos(14\tau)d\tau\right) - Cos(7t)\int_0^t Sen(7\tau)Cos(7\tau)\,d\tau\right]\right]$
3.	Se integra, se evalúan los respectivos límites y se simplifica para obtener la respuesta final.	$\frac{1}{7}\left[Sen(7t)\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{14}Sen(7t)Cos(7t)\right)\right] - \frac{Cos(7t)}{14}[Sen^2(7t)]\right]$ $\frac{1}{14}t\,Sen(7t)$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{14}t\,Sen(7t)}$$

b) $F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^3(s+2)}$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se separa en fracciones parciales para obtener una forma más sencilla de transformar inversamente.	$\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s+2}=1$ $\frac{s^2(s+2)A+s(s+2)B+(s+2)C+Ds^3}{s^3(s+2)}=1$
2.	Se plantea el sistema de 4 ecuaciones de 4 con 4 incógnitas y luego al resolverlo se obtienen los siguientes resultados	$A+D=0$ $2A+B=0$ $2B+C=0$ $2C=1$ $A=\frac{1}{8}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{1}{2}, D=-\frac{1}{8}$
3.	Ya es posible transformar inversamente Lo cual conlleva escribir primero el resultado del escalón unitario obtenido de la función original de e^{-3s} e indicar lo restante a trasformar.	$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=u(t-3)*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{8s}-\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{2s^3}-\frac{1}{8(s+2)}\right\}$ $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=u(t-3)\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}e^{-2t}\right]$
4.	Finalmente a cada término, exceptuando el constante, se le debe restar a su variable el término del escalón unitario.	$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=u(t-3)\left[\frac{1}{8}u(t-3)-\frac{1}{4}(t-3)u(t-3)+\frac{1}{4}(t-3^2)u(t-3)-\frac{1}{8}e^{-2(t-3)}u(t-3)\right]$

R./

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=u(t-3)\left[\frac{1}{8}u(t-3)-\frac{1}{4}(t-3)u(t-3)+\frac{1}{4}(t-3^2)u(t-3)-\frac{1}{8}e^{-2(t-3)}u(t-3)\right]$$

c) $F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2+6s+15}$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se completa al cuadrado el denominador para poder así transformar inversamente. Mientras que el término exponencial se transformará inversamente como un escalón unitario.	$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2+6s+15} = e^{-3s}\frac{1}{(s+3)^2+6}$
2.	Se obtiene la transformada inversa de la expresión anterior.	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{6}}{(s+3)^2+6}\right\}u(t-3)$
3.	Finalmente a cada término se le debe restar a su variable el término del escalón unitario.	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-3t} * Sen(\sqrt{6}t) * u(t-3)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-3(t-3)} * Sen(\sqrt{6}(t-3)) * u(t-3)$

R./

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-3(t-3)} * Sen(\sqrt{6}(t-3)) * u(t-3)$$

Tema 4: (20 Puntos)
Resolver

a) $f(t) = 1 + t + \frac{8}{3}\int_0^t (t-\theta)^3 f(\theta)d\theta$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Para resolver está ecuación integro diferencial se debe obtener la transformada de Laplace de cada uno de los términos que la componen, cabe mencionar que la integral se resuelve por medio del teorema de convolución.	$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{8}{3}\mathcal{L}\{t^3\}\mathcal{L}\{f(\theta)\}$ $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{16F(s)}{s^4}$
2.	Se despeja para $F(s)$. Y se simplifica.	$F(s)\left[1 - \frac{16}{s^4}\right] = \left[\frac{s+1}{s^2}\right]$ $F(s) = \left[\frac{s+1}{s^2}\right] * \left[\frac{s^4}{s^4-16}\right]$ $F(s) = \frac{s^2(s+1)}{(s^4-16)} = \frac{s^2(s+1)}{(s^2+4)(s^2-4)} = \frac{s^2(s+1)}{(s^2+4)(s+2)(s-2)}$
3.	Se separa en fracciones parciales	$\frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2}$ $\frac{(As+B)(s^2-4) + C(s^2+4)(s+2) + D(s^2+4)(s-2)}{s^4-16} = \frac{s^3+s^2}{s^4-16}$
4.	Al resolver el sistema de ecuaciones que esto produce se obtienen los siguientes valores.	$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{3}{8}, D = \frac{1}{8}$
5.	Se sustituyen en la función original y se transforman inversamente.	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2} * \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2} * \frac{1}{s^2+4} + \frac{3}{8} * \frac{1}{s-2} + \frac{1}{8} * \frac{1}{s+2}$
6.	Finalmente	$f(t) = \frac{1}{2}Cos[2t] + \frac{1}{4}Sin[2t] + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}$

R./
$$f(t) = \frac{1}{2}Cos[2t] + \frac{1}{4}Sin[2t] + \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}$$

b) $\frac{dy}{dt} + 4y(t) + 16\int_0^t y(\theta)d\theta = 1$ $y(0) = 0$

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1.	Para resolver está ecuación integro diferencial se debe obtener la transformada de Laplace de cada uno de los términos que la componen, cabe mencionar que la integral se resuelve por medio del teorema de convolución.	$sy(s) - y(0) + 4y(s) + 16y(s) * \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$
2.	Se despeja para $F(s)$ Se simplifica y se completa al cuadrado el denominador.	$y(s)\left[s + 4 + \frac{16}{s}\right] = \frac{1}{s}$ $y(s) = \left[\frac{s}{s(s^2+4s+16)}\right] = \frac{1}{s^2+4s+16} = \frac{1}{(s+2)^2+12}$
3.	Se transforma inversamente la última expresión.	$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+12}\right\}$
4.	Finalmente se transforma inversamente	$y(t) = \frac{1}{\sqrt{12}} sen(\sqrt{12}t)e^{-2t}$

R./

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{12}} sen(\sqrt{12}t)e^{-2t}$$

Tema 5: (10 Puntos)

Hallar la transformada de:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq T \leq 4 \\ 0 & T \geq 4 \end{cases}$$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Para transformar esta función por partes se debe expresar como una función ordinaria. Para esto se utiliza el escalón unitario.	$f(t) = t - t * u(t-4)$
2.	Debido a que para transformar se necesita que la variable que acompaña al escalón unitario posea el argumento del mismo se realiza el siguiente arreglo.	$f(t) = t - (t-4)u(t-4) - 4u(t-4)$
3.	Se realiza la transformada de Laplace	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t - (t-4)u(t-4) - 4u(t-4)\}$ $f(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{4e^{-4s}}{s}$

$$R./$$

$$f(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{4e^{-4s}}{s}$$