UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-2-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Septiembre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**José Carlos Orozco de León**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Douglas Kennedy Román**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

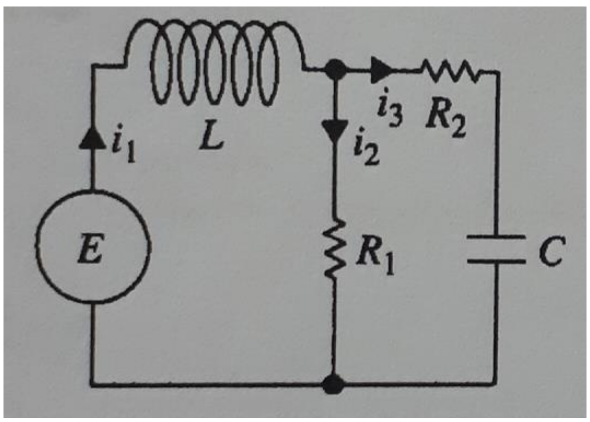
Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Aplicada 1**

Septiembre de 2017 Segundo parcial

NOTA: El examen se realiza durante el período de clase y tiene duración de 50 minutos.

Tema 1: 30 puntos.

A) Plantee el sistema de ecuaciones diferenciales que calcule las corrientes $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ en el circuito eléctrico.

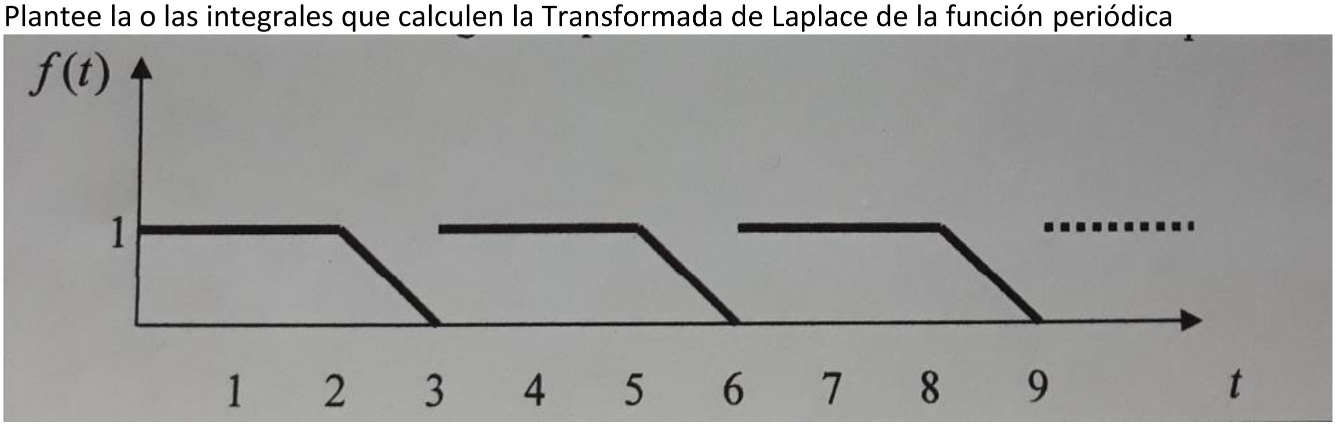


B) Obtenga f(t) usando convolución o la transformada de Laplace de una integral si:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+9)}$$

Tema 2: 15 puntos.

Plantee la o las integrales que calculen la Transformada de Laplace de la función periódica



Tema 3: 25 puntos.

Un cuerpo que pesa 64 libras se sujeta al extremo de un resorte suspendido del techo y lo estira 16 pies. Suponiendo una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea y que el peso se suelta desde la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia debajo de 4 pies/seg, use la Transformada de Laplace para encontrar la ecuación x(t) que representa el movimiento del cuerpo.

Tema 4: 30 puntos.

Resolver el sistema usando la Transformada de Laplace

$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=t^2$ Considere las condiciones: $x(0)=8$ $y(0)=0$

$x'(0)=8$ $y'(0)=0$

$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2}=4t$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 30 puntos

Inciso A (15 puntos)

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se procede a plantear la ecuación de la corriente	$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$
2.	Se sustituyen las corrientes, tomando en cuenta si pasan por una inductancia, capacitor o resistencia	$\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t)$
4.	**Respuesta**	$\boldsymbol{i_3R_2 + \frac{1}{c}\int_0^t i_3(\tau)d\tau - i_2R_1 = 0}$

Inciso B (15 puntos)

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se separa la función	$F(s) = \frac{1}{s^2}$ $G(s) = \frac{1}{s^2+9}$
2.	Se procede a operar por medio de transformada de Laplace inversa	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) =$ $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) = \frac{1}{3}sen3t$
3.	Se utilizan los valores obtenidos en la transformada de Laplace inversa en la fórmula y así poder operar	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $\int_0^t \tau e^{7(t-\tau)}d\tau$
4.	Se procede a integrar la función por partes	$e^{7t}\int_0^t \tau e^{-7\tau}d\tau$ $u = \tau$ $v = \frac{e^{-7\tau}}{7}$ $du = d\tau$ $dv = e^{-7\tau}$
5.	Integrando la función se obtiene	

		$e^{7t}\left[\frac{-te^{-7t}}{7}-\frac{e^{-7\tau}}{49}\right]$
5.	Integral valuada en los límites de 0 a t	$e^{7t}\left[\frac{-te^{-7t}}{7}-\frac{e^{-7\tau}}{49}+\frac{1}{49}\right]$
6.	**Respuesta**	$\boldsymbol{f(t)=-\frac{t}{7}-\frac{1}{49}+\frac{1}{49}e^{7t}}$

Tema 2: 20 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a determinar los intervalos que se utilizarán en las integrales	$\begin{cases}1 & 0\le t<2\\ -t+3 & 2\le t\le 3\end{cases}$
2.	Se encuentra la ecuación de la recta, para utilizarla en la integral	$m=\frac{0-1}{3-2}=-1 \qquad y=-x+3$
3.	Fórmula a utilizar	$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-st}}\int_0^t e^{-st}f(t)dt$
4.	**Respuesta**	$\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-st}}\left[\int_0^2 e^{-st}f(t)dt+\int_2^3 e^{-st}(-t+3)dt\right]}$

Tema 3: 30 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se determinan los datos que brinda el problema, así como la fórmula a utilizar	$mx'' + Bx' + kx = f(t)$ $B = 2 \qquad x(0) = 0$ $k = 4 \qquad x'(0) = 4$ $m = 2$
2.	Se plantean y operan las transformadas de Laplace, utilizando los valores iniciales	$2\mathcal{L}\{x''\} + 2\mathcal{L}\{x'\} + 4\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{0\}$ $2[s^2x(s) - sx(0) - x'(0)] + 2[sx(s) - x(0)] + 4x(s) = 0$ $2s^2x(s) - 8 + 2sx(s) + 4x(s) = 0$
3.	Se despeja el término x(s)	$x(s)[2s^2 + 2s + 4] = 8$ $x(s) = \dfrac{8}{2s^2 + 2s + 4} \Longrightarrow \dfrac{8}{2(s^2 + s + 2)}$ $x(s) = \dfrac{4}{s^2 + s + 2}$

4.	Se opera el denominador completando cuadrados	$x(s) = \dfrac{4}{s^2 + s + \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4}}$ $x(s) = \dfrac{4}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$
5.	Se procede a operar la transformada de Laplace	$x(s) = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + \frac{7}{4}}\right\}_{s \to s + \frac{1}{2}}$
6.	**Respuesta**	$\boldsymbol{x(t) = \dfrac{8}{\sqrt{7}} sen \dfrac{\sqrt{7}}{2} e^{\frac{-t}{2}}}$

Tema 4: 30 puntos.

No	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1.	Sistema de ecuaciones a operar y condiciones iniciales	$x'' + y'' = t^2 \quad x(0) = 8 \quad y(0) = 0$ $x'' - y'' = 4t \quad x'(0) = 0 \quad y'(0) = 0$
2.	Se procede a obtener la transformada de Laplace para la primera ecuación del sistema, así como también a sustituir los valores iniciales del problema	$\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{t^2\}$ $[s^2x(s) - sx(0) - x'(0)] + [s^2y(s) - sy(0) - y'(0)] = \dfrac{2}{s^3}$ $s^2x(s) - 8s + s^2y(s) = \dfrac{2}{s^3}$
3.	Se procede a obtener la transformada de Laplace para la segunda ecuación del sistema, así como también a sustituir los valores iniciales del problema	$\mathcal{L}\{x''\} - \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{4t\}$ $[s^2x(s) - sx(0) - x'(0)] - [s^2y(s) - sy(0) - y'(0)] = \dfrac{4}{s^2}$ $s^2x(s) - 8s - s^2y(s) = \dfrac{4}{s^2}$

4.	Se suman las dos ecuaciones obtenidas	$s^2x(s) - 8s + s^2y(s) = \frac{2}{s^3}$ $s^2x(s) - 8s - s^2y(s) = \frac{4}{s^2}$
5.	La ecuación resultante queda en términos de x(s), por lo que se procede a despejar x(s)	$2s^2x(s) - 16s = \frac{2s^2 + 4s^3}{s^5}$ $x(s) = \frac{2s^2 + 4s^3 + 16s^6}{2s^7}$
6.	Se simplifican los términos y se procede a aplicar la transformada de Laplace inversa	$x(s) = \frac{1}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{8}{s}$ $\mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} + 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$
7.	**Respuesta x(t)**	$\boldsymbol{x(t) = \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{3} + 8}$
8.	Se restan las dos ecuaciones obtenidas	$s^2x(s) - 8s + s^2y(s) = \frac{2}{s^3}$ $s^2x(s) - 8s - s^2y(s) = \frac{4}{s^2}$
9.	La ecuación resultante queda en términos de y(s), por lo que se procede a despejar y(s)	$2s^2y(s) = \frac{2s^2 - 4s^3}{s^5}$ $y(s) = \frac{2s^2 + 4s^3}{s^7}$
10.	Se simplifican los términos y se procede a aplicar la transformada de Laplace inversa	$y(s) = \frac{1}{s^5} - \frac{2}{s^4}$ $\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$
11.	**Respuesta y(t)**	$\boldsymbol{y(t) = \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{3}}$