UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-3-M-2-12-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Curso de vacaciones Diciembre 2017**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Diciembre 2017**
HORARIO DE EXAMEN:	**11:00 – 13:00**
AUXILIAR:	**Oscar Arias**
CLAVE:	**CLAVE-118-3-M-2-12-2017**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
MATEMÁTICA APLICADA I

FACULTAD DE INGENIERÍA
TERCER PARCIAL (temario a)

TEMA No1 (40 puntos)

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando vectores propios

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - 4y$$

$$y(0) = 0\ ,\quad x(0) = 1$$

TEMA No2(20 PUNTOS)

Hallar la ecuación de la corriente del circuito RC, sabiendo que R = 4 ohm, C = 0.25 faradios. Y el voltaje V $=t^2$.

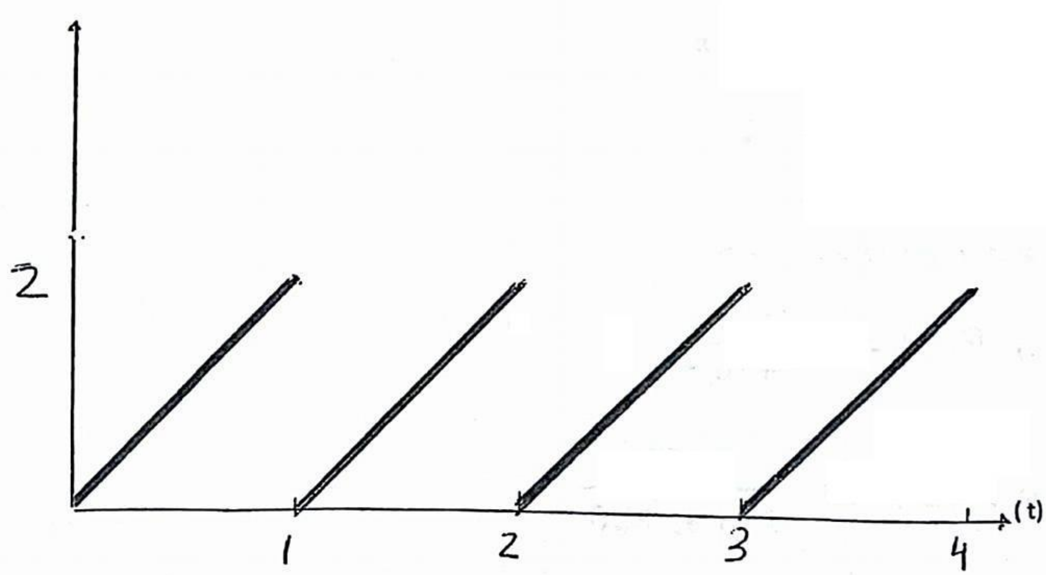
TEMA No 3 (20 puntos)

Hallar la ecuación de la corriente de un circuito RLC, sabiendo que L = 0.20 henrios, R= 5 ohm, C= 0.25 faradios. Y el voltaje V= 4T. $i(o) = 0$

TEMA No 4 (20 puntos)

Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función periódica:

f(t)



SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (40 puntos)

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando vectores propios.

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 5y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - 4y$$

$$y(0) = 0, \quad x(0) = 1$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se colocan los valores constantes del segundo miembro de cada ecuación diferencial como una matriz y luego en cada valor de la diagonal principal se le resta un valor λ λ	$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 5 & -4-\lambda \end{bmatrix}$
2.	Se calcula el determinante de la última matriz y se despejaλ.	$(4-\lambda)(-4-\lambda) - (-5)(5) = 0$ $(-16 + 4\lambda - 4\lambda + \lambda^2) + 25 = 0$ $\lambda = \pm 3i$
3.	Se evalúa para cada valor de λ para $3i\ y - 3i$, entonces se hallan los valores de x y y en cada caso tomando un valor arbitrario para x.	Para 3i $(4-3i)x - 5y = 0$ $5x - (4+3i)y = 0$ Valor arbitrario: $x = 4 + 3i$ Sustituyendo en la primera $(4-3i)(4+3i) - 5y = 0$ $y = 5$ Para -3i $(4+3i)x - 5y = 0$ $5x - (4-3i)y = 0$ Valor arbitrario: $x = 4 - 3i$ Sustituyendo en la primera $(4-3i)(4+3i) - 5y = 0$ $y = 5$
4.	Ahora se debe escribir en modo matricial cada resultado.	$K1 = \begin{bmatrix} 4+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \quad K2 = \begin{bmatrix} 4-3i \\ 5 \end{bmatrix}$
5.	Se escribe en la forma estándar de un vector propio, entonces ya se puede determinar el valor de x y y.	$\mathfrak{x} = c1K1e^{\lambda 1t} + c2K2e^{\lambda 2t}$ $\mathfrak{x} = c1\begin{bmatrix} 4+3i \\ 5 \end{bmatrix}e^{3it} + c2\begin{bmatrix} 4-3i \\ 5 \end{bmatrix}e^{-3it}$ $\mathfrak{x} = c1\left[\binom{4}{5}Cos3t - \binom{3}{0}Sen3t\right] + c2\left[\binom{3}{0}Cos3t + \binom{4}{5}Sen3t\right]$
6.	Se escriben los valores de $x(t)$ y $y(t)$.	$x(t) = c1[4Cos3t - 3Sen3t] + c2[3Cos3t + 4Sen3t]$ $y(t) = c1[5Cos3t] + c2[5Sen3t]$

7.	Se evalúan las condiciones iniciales para determinar los valores de las Constantes.	$1 = c1[4] + c2[3]$ $0 = c1[5] + c2$ $c1 = 0, \quad c2 = \frac{1}{3}$
8.	Finalmente se tienen los valores de x y y.	$x(t) = \frac{1}{3}[3Cos3t + 4Sen3t]$ $y(t) = \frac{1}{3}[5Sen3t]$

$$x(t) = \frac{1}{3}[3Cos3t + 4Sen3t]$$

$$y(t) = \frac{1}{3}[5Sen3t]$$

Tema 2 (20 puntos)

Hallar la ecuación de la corriente del circuito RC, sabiendo que R=4 ohm, C=0.25 faradios y el voltaje v=t^2.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Los datos que nos proporciona el enunciado son los siguientes. La forma estándar de un circuito RC es la siguiente.	$R = 4\ ohm, C = 0.25f, v = t^2$ $Ri(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt = V(t)$
2.	Se sustituyen los valores y se transforma cada término de la ecuación.	$4i + 4\int_0^t idt = t^2$ $4i(s) + \frac{4i(s)}{s} = \frac{2}{s^3}$
3.	Se despeja $i(s)$.	$i(s)\left[4 + \frac{4}{s}\right] = \frac{2}{s^3} => i(s) = \frac{2}{s^2(4s+4)}$
4.	Se separa en fracciones parciales.	$\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{4s+4}$ $As(4s+4) + B(4s+4) + cs^2 = 2$
5.	Se encuentran los valores de las constantes.	$A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ C = 2$
6.	Se reescriben en la ecuación y se transforman inversamente.	$i(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2} * \frac{1}{s} + \frac{1}{2} * \frac{1}{s^2} + 2 * \frac{1}{4(s+1)}\right\}$ $i(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e * -t$

R./

$$i(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e * -t$$

Tema 3: (20 puntos)

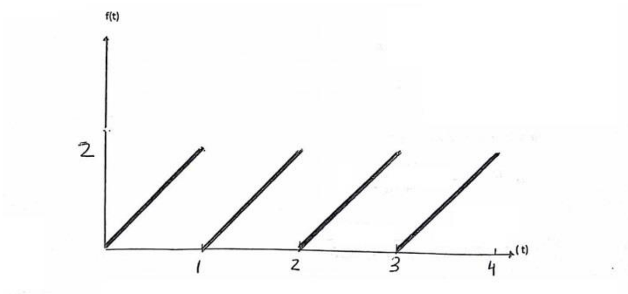
Hallar la ecuación de corriente del circuito RLC, sabiendo que L=0.20 henrios, R=5 ohm, C=25 faradios y el voltaje V=4t. $i(0) = 0$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Los datos que nos proporciona el enunciado son los siguientes. La forma estándar de un circuito RLC es la siguiente.	$L = 0.20\ h, R = 5\ ohm, C = 0.25f, v = 4t$ $$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt = V(t)$$
2.	Se sustituyen los valores y se transforma cada término de la ecuación.	$$\frac{1}{5}i' + 5i + 4\int_0^t idt = 4t$$ $$\frac{1}{5}(si(s) - i(0)) + 5i(s) + \frac{4i(s)}{s} = \frac{4}{s^2}$$
3.	Se despeja $i(s)$.	$$i(s)\left[\frac{1}{5}s + 5 + \frac{4}{s}\right] = \frac{4}{s^2} => i(s) = \frac{20}{s(s^2+25s+20)}$$
4.	Se separa en fracciones parciales.	$$\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 25s + 20}$$ $$As^2 + 25As + 20A + Bs^2 + Cs = 20$$
5.	Se encuentran los valores de las constantes.	$A = 1,\ \ B = -1,\ \ C = -25$
6.	Se reescriben en la ecuación y se debe hallar la completación al cuadrado del segundo término.	$$i(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-s-25}{s^2+25s+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-s-25}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 - \frac{545}{4}}\right\}$$
7.	Se separan en distintas fracciones el segundo término.	$$i(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 - \frac{545}{4}} - \frac{25}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 - \frac{545}{4}}\right\}$$
8.	Como se necesita que se cumpla el primer teorema de traslación inverso, en el término que contiene s en el numerador se le debe sumar y restar $\frac{25}{2}$. Por lo tanto el término negativo se suma a la fracción restante dando como resultado lo siguiente.	$$i(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{25}{2}}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 - \frac{545}{4}} - \frac{25}{2}\frac{1}{\left(s+\frac{25}{2}\right)^2 - \frac{545}{4}}\right\}$$
9.	Ya es posible transformar inversamente, por tanto se obtiene la función de la corriente $i(t)$.	$$i(t) = 1 - e^{-\frac{25}{2}t}Cosh\left(\frac{\sqrt{545}t}{2}\right) - \frac{25}{\sqrt{545}}e^{-\frac{25}{2}t}Senh\left(\frac{\sqrt{545}t}{2}\right)$$

$$i(t) = 1 - e^{-\frac{25}{2}t}Cosh\left(\frac{\sqrt{545}t}{2}\right) - \frac{25}{\sqrt{545}}e^{-\frac{25}{2}t}Senh\left(\frac{\sqrt{545}t}{2}\right)$$

Tema 4: (20 Puntos)

Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función periódica.



No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Primero se determina el valor del periodo y la función periódica.	$T = 1$ $f(t) = 2t$
2.	La forma estándar de la transformada de Laplace de una función periódica es la siguiente. Luego se sustituyen los valores dados.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} * \int_0^T e^{-st} f(t)dt$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-s}} * 2\int_0^1 te^{-st}dt$
3.	Integrando por partes se obtiene.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-s}} * 2\left[te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right], de\ 0\ a\ 1$
4.	Evaluando los límites y simplificando.	
5.	Se sustituyen en la función original y se transforman inversamente.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{1-e^{-s}}\left[\frac{s^2e^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2}\right]$

$R./$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{1-e^{-s}}\left[\frac{s^2e^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2}\right]$$