UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-4-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**SEGUNDO**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**07 de noviembre de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jorge Daniel Cardona Ochoa**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Jorge Daniel Cardona Ochoa**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

TEMARIO A

INSTRUCCIONES: lea cuidadosamente cada TEMA, dejando constancia de su procedimiento

TEMA No.1 (20 puntos)

A) Dada $f(t)=\begin{cases}0 & sí \quad 0\le t<2\\ t & sí \quad 2\le t<4\\ 4 & sí \quad t\ge 4\end{cases}$

Obtenga:

i) Grafica (2 puntos)

ii) *Transformada de Laplace POR* DEFINICION. (8 puntos)

B) Plantee la función $f(t)$ del inciso A) con funciones tipo escalón y luego calcule su Transformada de Laplace.

(10 puntos)

TEMA No.2 (20 puntos)

A) Obtenga $f(t)$ usando Convolucion ó la Transformada de una Integral

$$F(s)=\frac{2}{s^2(s^2+4)}$$

B) Obtenga $F(s)$ sí:

$$f(t)=te^t sen(2t)$$

TEMA No.3 (20 puntos)

Un circuito RLC serie, tiene una inductancia L= 1 Henrios, una resistencia $R=4$ *Ohmios y una* capacitancia $C=\frac{1}{3}$ Faradios. El circuito se alimenta con una fuente de voltaje constante $E(t)=150$ Voltios. Si la corriente en amperios y la carga en coulombs al inicio son cero. ¿Utilizando la Transformada de Laplace, determine la ecuación que calcule la carga $q(t)$ en cualquier tiempo?. (Considere la ecuación de Kirchoff: $Lq''(t)+Rq'(t)+\frac{q(t)}{C}=E(t)$

TEMA No.4 (20 puntos)

Usando valores propios y vectores propios, obtenga la solución del sistema en la forma:
$X=C_1X_1+C_2X_2+\cdots\cdots+C_nX_n$

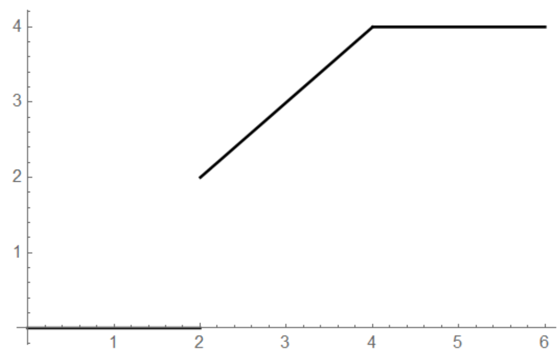
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + y + 6z\\ \frac{dy}{dt} &= 2y + 5z\\ \frac{dz}{dt} &= 2z\end{aligned}$$

TEMA No.5 (20 puntos)

Obtenga de ser posible 2 soluciones en serie de potencias linealmente independientes respecto del PUNTO ORDINARIO $X_0=0$, para la ecuación diferencial.

$$(x-1)y''+y'=0$$

TEMA 1

I) Graficar	
ii) Obtener la transformada por definición	$L\{f(t)\} = \int_0^2 e^{-st}(0)dt + \int_2^4 e^{-st}(t)dt + \int_4^\infty e^{-st}(4)dt$ $L\{f(t)\} = \int_2^4 e^{-st}(t)dt + 4\int_4^\infty e^{-st}dt$
Luego de la integración resulta la siguiente expresión:	$F(s) = e^{-2s}\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) + \frac{e^{-4s}}{s^2}$
B) Para obtener f(t) con funciones escalón debemos restar a la función tμ(t-2) la función lineal (t-4)μ(t-4)	$f(t) = t\mu(\mathrm{t}-2) - (t-4)\mu(\mathrm{t}-4)$
Obteniendo la transformada inversa de Laplace queda lo siguiente:	$F(s) = e^{-2s}\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) + \frac{e^{-4s}}{s^2}$

TEMA 2

	$$F(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$$
A) Identificar las dos funciones en la expresión original	$H(s) = \frac{1}{s^2}$; $E(s) = \frac{2}{s^2+4}$
Transformado las expresiones anteriores	$h(t) = t$; $e(t) = Sen(2t)$
Construyendo la expresión de convolución:	$f(t) = \int_0^t \tau Sen(t-\tau)d\tau$
Realizando la integración el resultado es el siguiente:	$\frac{t}{2} - \frac{1}{4}Sen(2t)$
B)	$f(t) = te^t Sen(2t)$
Utilizando el teorema de la derivada de la transformada	$L\{te^t Sen(2t)\} = -\frac{d}{ds}L\{e^t Sen(2t)\}$
Luego de aplicar el teorema de la derivada de la transformada queda lo siguiente:	$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{(s-1)^2+4}\right)$
Al realizar la derivación respecto a la variable “s” se obtiene el siguiente resultado:	$F(s) = \frac{4(s-1)}{[(s-1)^2+4]^2}$

TEMA 3

Datos:	L= 1 henrio R= 4 ohm C= 1/3 faradios E(t)=150 q(0)=0 q'(0)=0
Expresión general:	$Lq(t)'' + Rq(t)' + \frac{q(t)}{C} = E(t)$
Sustituyendo datos	$q(t)'' + 4q(t)' + 3q(t) = 150$ $x'' + 8x' + 16x = 0$
Obteniendo la transformada de la derivada	$L\{q(t)'' + 4q(t)' + 3q(t) = 150\}$ $s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 4[sQ(s) - q(0)] + 3Q(s) = \frac{150}{s}$
Sustituyendo los valores conocidos	$s^2Q(s) + 4sQ(s) + 3Q(s) = \frac{150}{s}$ $Q(s)[s^2 + 4s + 3] = \frac{150}{s}$ $Q(s) = \frac{150}{s(s^2 + 4s + 3)}$
Realizando las fracciones parciales de la última expresión	$Q(s) = \frac{150}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{50}{s} - \frac{75}{s+1} + \frac{25}{s+3}$
Transformada inversa	$L^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n e^{at}$; $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
Obteniendo la transformada inversa de Q(s)	$x(t) = 50 - 75e^{-t} + 25e^{-3t}$

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS — DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE INGENIERIA — MATEMATICA APLICADA 1
ESCUELA DE CIENCIAS — PRIMERA RETRASADA 23 MAYO 2017

TEMA 4

A) Plantear la matriz determinante	$\det(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}2-\lambda & 1 & 6\\ 0 & 2-\lambda & 5\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}$
Valores propios	$\lambda=2, multiplicidad\ 3$
Sustituyendo el valor propio λ=2 en el sistema	$\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
Obteniendo las ecuaciones simultáneas	$k_2+6k_3=0$ $5k_3=0$ $k_1=0$ $k_2=0$ $k_3=0$
Para plantear una solución no trivial del vector propio K se tomará como k_1=1 y los valores de k_2 y k_3 tienen un valor de 0	$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
Debido a que contamos con un valor propio de multiplicidad 3, es necesario encontrar los vectores **P** y **Q** para presentar la solución general	$(A-2I)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{K}$ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}=\begin{matrix}1\\ 0\\ 0\end{matrix}$
Obteniendo las ecuaciones del sistema anterior	$p_2+6p_3=1$ $5k_3=0$ $p_1=0$ $p_2=1$ $p_3=0$
Se encuentran los valores de p_2=1 y p_3=0, y asignando un valor a p_1=0	$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$
Encontrando vector propio **Q**	$(A-2I)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}$ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ p_3\end{pmatrix}=\begin{matrix}0\\ 1\\ 0\end{matrix}$

Obteniendo las ecuaciones simultáneas	$q_2 + 6q_3 = 0$ $5q_3 = 1$ $q_1 = 0$ $q_2 = -6/5$ $q_3 = 1/5$
Se encuentran los valores de q_2=-6/5 y q_3=1/5, y asignando un valor a q_1=0	$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$
La solución general del sistema en cuestión es la siguiente:	$\boldsymbol{X} = C_1\boldsymbol{K}e^{\lambda t} + C_2\left[\boldsymbol{K}te^{\lambda t} + \boldsymbol{P}e^{\lambda t}\right] + C_3\left[\boldsymbol{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda t} + \boldsymbol{P}te^{\lambda t} + \boldsymbol{Q}e^{\lambda t}\right]$
Sustituyendo valores la respuesta es la siguiente:	
$X = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t} + C_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}\right] + C_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\-6/5\\1/5\end{pmatrix}e^{2t}\right]$	

TEMA 5

Solución en la forma de serie de potencias	$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}$ $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1) c_n x^{n-2}$
Sustituyendo en la expresión original	$(x-1)y'' + y' = 0$ $(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 0$

Expandiendo la ecuación anterior

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 0$$

Realizando un cambio de variable en las 3 sumatorias de la ecuación anterior tomando en cuenta los superíndices de las variables x y también asegurando que los subíndices de las sumatorias tengan el mismo valor

$k = n - 1$ Para n=2 $2 = k + 1$ $k = 1$	$k = n - 2$ Para n=2 $2 = k + 2$ $k = 0$	$k = n - 1$ Para n=1 $1 = k + 1$ $k = 0$

Sustituyendo los nuevos valores del cambio de variable realizado anteriormente queda de la siguiente manera

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\, c_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k = 0$$

Realizando la segunda y tercera sumatoria con k=0 para igualar todos los subíndices

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\, c_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)\, c_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + c_1 - 2c_2 = 0$$

Obteniendo factor común y reagrupando términos	
$$\sum_{k=1}^{\infty}[c_{k+1}(k+1)^2 + c_{k+2}(k+1)(k+2)]\,x^k + c_1 - 2c_2 = 0$$ $$c_1 - 2c_2 = 0 \qquad (1)$$ $$c_{k+1}(k+1)^2 + c_{k+2}(k+1)(k+2) = 0 \qquad (2)$$	
Despejando de la ecuación (2) queda la siguiente expresión	$$c_{k+2} = \frac{c_{k+1}(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)c_{k+1}}{k+2}$$
Iterando la expresión anterior se obtiene:	$$k=1, \quad c_3 = \frac{2}{3}c_2 = \frac{c_1}{3}$$ $$k=2, \quad c_4 = \frac{3}{4}c_3 = \frac{c_1}{4}$$ $$k=3, \quad c_5 = \frac{4}{5}c_4 = \frac{c_1}{5}$$ $$k=4, \quad c_6 = \frac{5}{6}c_5 = \frac{c_1}{6}$$

Será necesario sustituir los valores encontrados anteriormente en esta expresión	$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots \ldots \ldots$$
Finalmente obtenemos:	$$y(x) = c_0 + c_1\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \ldots\right]$$ $$y(x) = c_0 + c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$ $$y_1(x) = c_0$$ $$y_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n}$$