UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-123-1-M-1-00-2017

CURSO:	**Matemática Aplicada 5**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**123**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**15 de febrero de 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**José Estuardo Orellana**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Ing. Luis Carlos Bolaños**
DIGITALIZO EL EXAMEN:	**José Estuardo Orellana**
COORDINADOR:	**Ing. Alfonso Velázquez**

UNIVERSIDAD SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA APLICADA 5
ING. LUIS CARLOS BOLAÑOS
FEBRERO DE 2016

PRIMER EXAMEN PARCIAL

Tema 1: (30 puntos) Simplifique las expresiones y encuentre la parte real e imaginaria.

- $\sqrt[-i]{-i}$
- $\frac{(1+i)(1-2i)}{1+3i}$
- $(-1+i)^{15}$

Tema 2: (20 puntos) Encuentre todos los valores de la forma (a+ib) de la siguiente expresión y grafique en el plano complejo

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1/3}$$

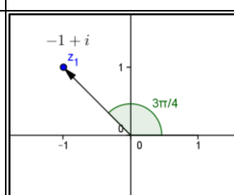
Tema 3: (30 puntos) Encuentre la corriente eléctrica en estado estable en un circuito RLC serie si L=1H, F=1/2F, R=1 y se alimenta con una fuente E=3sin(t-π/2)

Tema 4: (20 puntos) Encuentre la ecuación de la parábola con foco en -1-i y que tiene como directriz la recta $\sqrt{3}Im(z)+Re(z)=0$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (30 puntos) Simplifique las expresiones y encuentre la parte real e imaginaria.

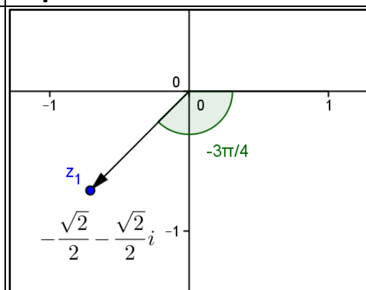
- $\sqrt[-i]{-i}$
- $\frac{(1+i)(1-2i)}{1+3i}$
- $(-1+i)^{15}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	a)Se simplifica el radical realizando operaciones en el exponente con la constante e como base	$\sqrt[-i]{-i} = (i)^{\frac{1}{-i}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{\frac{1}{-i}} = e^{\left(\frac{\pi}{2}i\right)\left(\frac{1}{-i}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$
2.	b)Se simplifica con las reglas del álgebra en complejos	$\frac{(1+i)(1-2i)}{1+3i} = \frac{1-2i+i+2}{1+3i}$ $= \frac{3-i}{1+3i} * \frac{1-3i}{1-3i}$ $= \frac{3-i-9i-3}{1^2+3^2} = \frac{-10i}{10} = -i$
3.	c) Se lleva la base a forma polar con el fin de poder operar únicamente el exponente de la constante e y el módulo del número complejo.	 $(-1+i)^{15}$ $\theta_{ref} = \tan^{-1}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) =$ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} \to \theta = \frac{3\pi}{4}$ $\lvert -1+i \rvert = \sqrt{(-1)^2+1^2}$ $= \sqrt{2}$
4.	Posteriormente se opera con álgebra. Terminando en una forma cartesiana.	$(-1+i)^{15} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^{15} = 2^{\frac{15}{2}} * e^{\frac{3\pi}{4}i*15}$ $= 2^7 * \sqrt{2} * e^{\frac{45\pi}{4}i}$ $= 128\sqrt{2} * e^{11\frac{\pi}{4}i} = 128\sqrt{2} * e^{\frac{5\pi}{4}i}$ $= -128 - 128i$

	Re[z]	Im[z]
• $\sqrt[-i]{-i}$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	0
• $\frac{(1+i)(1-2i)}{1+3i}$	0	-1
• $(-1+i)^{15}$	-128	-128

Tema 2: (20 puntos) Encuentre todos los valores de la forma (a+ib) de la siguiente expresión y grafique en el plano complejo

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1/3}$$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Llevar a la forma polar.</td><td>

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1/3}$$

$$\theta_{ref}=\tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}\rightarrow\theta=-\frac{3\pi}{4}$$

$$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Se procede a operar con el álgebra, teniendo en cuenta que el argumento puede expresarse como θ+2πn</td><td>

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1/3}=\left(1e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)^{1/3}=\left(1e^{\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)i}\right)^{1/3}$$

$$=e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}\right)i}$$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Las tres soluciones o raíces del número complejo se encuentran cuando n=0, n=1 y n=2</td><td>

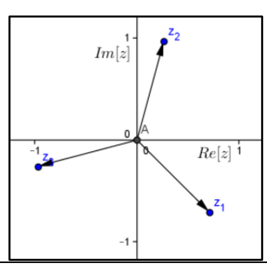
$$n=0$$

$$z_1=e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi(0)}{3}\right)i}=e^{-\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$n=1$$

$$z_2=e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi(1)}{3}\right)i}=e^{\frac{5\pi}{12}i}=0.259+0.966i$$

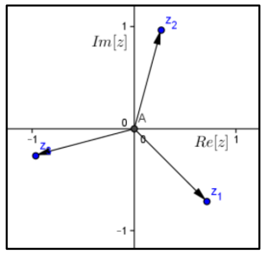
$$n=2$$

$$z_3=e^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi(2)}{3}\right)i}=e^{\frac{13\pi}{12}i}=-0.966-0.259i$$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Se grafican las soluciones en el plano complejo con su módulo y argumento</td><td>
</td></tr>
</table>

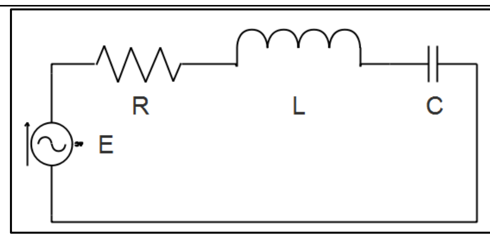
$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = 0.259 + 0.966i$$

$$z_3 = -0.966 - 0.259i$$



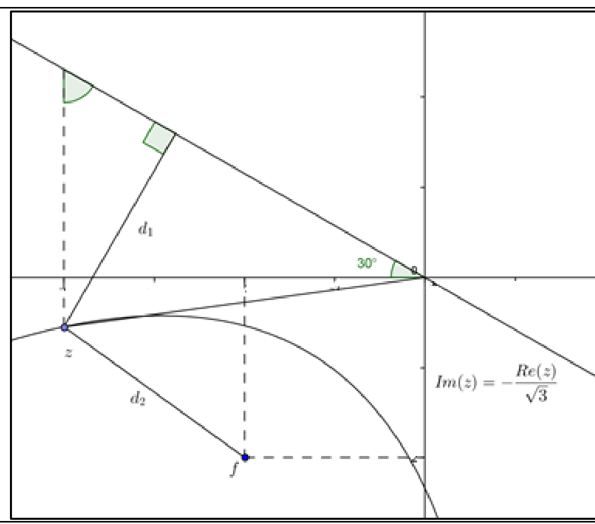
Tema 3: (30 puntos) Encuentre la corriente eléctrica en estado estable en un circuito RLC serie si L=1H, F=1/2F, R=1 y se alimenta con una fuente E=3sin(t-π/2)

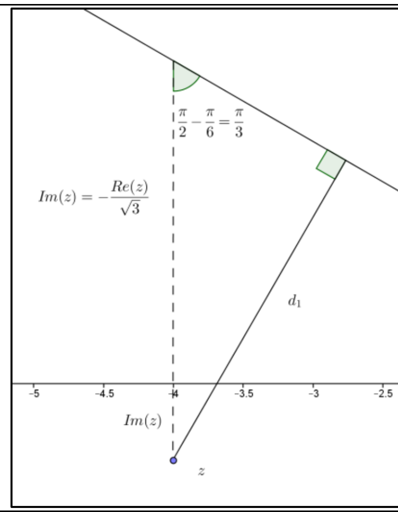
No.	Explicación	Operatoria
1.	Conviene visualizar el circuito y calcular los valores de reactancia inductiva y capacitiva, así como pasar la fuente de tensión a fasor.	 $E = 3Sen\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \bar{E} = 3\angle -\frac{\pi}{2} = -j3$ $\omega t = t \rightarrow \omega = 1$ $X_L = \omega L = 1(1) = 1$ $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1 * \frac{1}{2}} = 2$
2.	La impedancia total se calcula sumando los fasores de resistencia y reactancia.	$\bar{Z}_T = R + jX_L - jX_C = 1 + j - j2 = 1 - j$
3.	Relacionando la tensión y la corriente a través de la ley de Ohm se tiene.	$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_T} = \frac{-j3}{1-j} * \frac{1+j}{1+j} = \frac{-j3+3}{1+1} = \frac{3}{2} - j\frac{3}{2}$

4.	Se traslada el resultado obtenido a la forma polar.	$\bar{I} = \frac{3}{2} - j\frac{3}{2}$ $\theta_{ref} = \tan^{-1}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3/2}{3/2}\right) = -\frac{\pi}{4} \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$ $\left\lvert\frac{3}{2} - j\frac{3}{2}\right\rvert = \sqrt{(3/2)^2 + (-3/2)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\bar{I} = \frac{3}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$
5.	Finalmente, se regresa a la forma senoidal.	$I = \frac{3}{2}\sqrt{2}Sen\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\boxed{I = \frac{3}{2}\sqrt{2}Sen\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Tema 4: (20 puntos) Encuentre la ecuación de la parábola con foco en -1-i y que tiene como directriz la recta $\sqrt{3}Im(z) + Re(z) = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se realiza un diagrama en el plano complejo que ayude a visualizar la situación.	
2.	El procedimiento utilizado para encontrar el ángulo fue recordar que su tangente es la pendiente de la recta.	$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30° = -\frac{\pi}{6}$

3.	La definición de parábola aplicada al diagrama es:	$d_1 = d_2$
4.	Encontrar d_2 en términos de z consiste en encontrar la distancia entre z y el foco f.	$d_2 = \lvert z - f \rvert = \lvert z - (-1 - i) \rvert = \lvert z + 1 + i \rvert$
5.	Encontrar d_1 en términos de z requiere el uso de la geometría.	
6.	Para hipotenusa, se encuentra la distancia vertical del punto z a su correspondiente en la directriz.	$h = -\frac{Re(z)}{\sqrt{3}} - Im(z)$
7.	Se utilizan trigonometría.	$d_1 = Sen\left(\frac{\pi}{3}\right) * \left(-\frac{Re(z)}{\sqrt{3}} - Im(z)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} * \left(-\frac{Re(z)}{\sqrt{3}} - Im(z)\right) = -\frac{Re(z)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} Im(z)$
8.	Se igualan las dos distancias.	$\lvert z + 1 + i \rvert = -\frac{Re(z)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} Im(z)$

$$\boxed{\lvert z + 1 + i \rvert = -\frac{Re(z)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} Im(z)}$$