UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTA DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CLAVE-960-1-V-1-00-2015_sM

| | |
|---|---|
| **CURSO:** | Matemática para computación 1 |
| **TIPO DE EXAMEN:** | Primer parcial |
| **FECHA:** | 16 de febrero de 2015 |
| **SEMESTRE:** | Primero |
| **HORARIO DE EXAMEN:** | 13:10 – 14:50 |
| **NOMBRE DEL AUXILIAR:** | Fabelio Ajtún |
| **PERSONA QUE REVISO EL EXAMEN:** | Ing. Alfredo González |
| **NOMBRE DE LA CLAVE:** | CLAVE-960-1-V-1-00-2015_sM |

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Matemática para Computación 1
Primer Semestre de 2015

## Primer Parcial

**Tema 1** (25 Pts.)

a. Enumere todas las disposiciones lineales diferentes de las letras A, B y C de longitud 3.
b. Cuantas permutaciones diferentes pueden haber de las letras A, B y C de longitud 3.
c. Cuantas combinaciones diferentes de longitud dos hay de las letras A, B y C.

**Tema 2** (25 Pts.)

Cuantas disposiciones de las letras de FANFARANFUELA

a. Hay sin restricción
b. ¿Cuántas disposiciones diferentes hay?
c. ¿Cuántas disposiciones no tienen las letras A juntas y las letras F juntas.?

**TEMA 3** (25 puntos)

Hay 10 secciones de curso MB1. Hay 6 licenciados y 6 ingenieros que pueden dar el curso. De cuantas formas se puede llevar a cabo la asignación de catedráticos si

a. No hay restricción
b. La mitad de ingenieros y la mitad de licenciados
c. Al menos cuatro tienen que ser licenciados

**Tema 4** (25 Pts.)

¿Cuál es el valor del coeficiente de $r^3h^6$ en $(3\mathrm{r}-2\mathrm{h})^9$?

# SOLUCION DEL EXAMEN

**Tema 1** (25 Pts.)

a. Enumere todas las disposiciones lineales diferentes de las letras A, B y C de longitud 3.
b. ¿Cuántas permutaciones diferentes pueden haber de las letras A, B y C de longitud 3?
c. ¿Cuántas combinaciones diferentes de longitud dos hay de las letras A, B y C?

__SOLUCION__

**a. Enumere todas las posibles disposiciones lineales diferentes de las letras A, B y C de longitud 3.**

Teniendo en cuenta que se están pidiendo disposiciones lineales de una colección de N objetos distintos, lo cual se interpreta como las diferentes maneras en que se pueden ordenar estos elementos, se aplica el concepto de permutaciones el cual está definido de la siguiente manera:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$Donde:$$
$$n = \text{ número distintos elementos en la coleccion}$$
$$r = \text{número posible de elementos a escoger dentro de } n$$

Por lo que aplicando la fórmula se puede deducir el número de disposiciones que se deben enumerar

$$3P3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 6$$

Siendo las disposiciones, y la respuesta a la pregunta realizada, las que se enumeran a continuación:

1. **ABC**
2. **ACB**
3. **BAC**
4. **BCA**
5. **CAB**
6. **CBA**

**b. ¿Cuantas permutaciones diferentes pueden haber de las letras A, B y C de longitud 3?**

El enunciado directamente indica que se debe realizar una permutación de 3 elementos, escogiéndolos dentro de un conjunto que contiene 3 elementos distintos. Para esto se utiliza la siguiente fórmula:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$Donde:$$
$$n = \; 3, número\ de\ letras\ distintas\ de\ donde\ se\ escoge$$
$$r = 3, número\ de\ elementos\ que\ se\ deben\ escoger\ (longitud)$$

Por lo tanto la respuesta, sustituyendo valores en la fórmula, sería:

$$3P3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \mathbf{6}$$

**c. ¿Cuantas combinaciones diferentes de longitud dos hay de las letras A, B y C?**

Al igual que en el inciso anterior, el enunciado directamente indica que se debe realizar una combinación de 2 elementos escogiéndolos dentro de un conjunto que contiene 3 elementos distintos. Esto se interpreta como los distintos grupos que se pueden formar al escoger secuencialmente 2 letras de entre 3 posibles, de tal modo que cada combinación sea distinta de las demás por lo menos en una de las letras, sin importar el orden. Para esto se utiliza la siguiente fórmula:

$$nCr = \frac{n!}{r! * (n-r)!}$$

$$Donde:$$
$$n = \; 3, \quad número\ de\ letras\ distintas\ de\ donde\ se\ escogue$$
$$r = 2, \quad número\ de\ elementos\ que\ se\ deben\ escoger\ (longitud)$$

Por lo tanto la respuesta, sustituyendo valores en la formula, sería:

$$3P2 = \frac{3!}{2! * (3-2!)!} = \frac{3!}{2! * 1!} = \mathbf{3}$$

**Tema 2** (25 Pts.)

Cuantas disposiciones de las letras de FANFARANFUELA

a. Hay sin restricción
b. Cuantas disposiciones diferentes hay
c. Cuantas disposiciones no tienen las letras A juntas y las letras F juntas.

**<u>SOLUCION</u>**

**a. Hay sin restricciones**

Al tener el conjunto de letras de esta palabra, en las cuales no todos los elementos son distintos, y al decir que no se tienen restricciones se puede inferir que la operación a realizar es una permutación, esto porque no debemos tomar en cuenta si las disposiciones son iguales con respecto

a las letras que se repiten. Todas las letras se toman como diferentes. Por ejemplo las 4 apariciones de la letra A, se toman como $A_1, A_2, A_3$ y $A_4$.
Para este caso la fórmula a aplicar es la siguiente:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\begin{aligned}
&Donde: \\
&n = 13, \quad numero\ de\ letras\ distintas\ de\ donde\ se\ escogue \\
&r = 13, \quad numero\ de\ elementos\ que\ se\ deben\ escoger\ (longitud)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta, sustituyendo valores en la formula, seria:

$$13P13 = \frac{13!}{(13-13)!} = \frac{13!}{0!} = \mathbf{6,227,020,800}$$

**b. ¿Cuántas disposiciones diferentes hay?**

Para este inciso, al tener un conjunto de letras en las que algunas se repiten y al pedir el número de disposiciones diferentes (el orden no importa) se debe aplicar el concepto de permutaciones con grupos de objetos iguales.

Para estas permutaciones de *n* objetos, con *r* grupos de objetos iguales se aplica la siguiente formula:

$$P_n^r = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \ldots * n_r!}$$

$$\begin{aligned}
&Para\ este\ caso\ tenemos\ que: \\
&n = 13\ , representa\ el\ numero\ total\ de\ letras\ en\ la\ palabra \\
&n_1 = 3\ , número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ F \\
&n_2 = 4\ , número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ A \\
&n_3 = 2\ , número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ N \\
&n_4 = 1\ , número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ R \\
&n_5 = 1\ , número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ U \\
&n_6 = 1\ , número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ E \\
&n_7 = 1\ , número\ de\ veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ L
\end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta, sustituyendo valores en la formula, seria:

$$P_{13}^7 = \frac{13!}{3! * 4! * 2! * 1! * 1! * 1! * 1!} = \mathbf{21,621,600}$$

**c. ¿Cuántas disposiciones no tienen las letras A juntas y las letras F juntas?**

Para encontrar el número de disposiciones lineales en donde las letras A y las letras F no estén juntas se realiza el siguiente análisis:

1. Se encuentra el número total de disposiciones en las que estas letras si están juntas. Para esto el total de letras F se toman como una sola unidad al igual que el total de letras A.

$$\underbrace{\mathrm{FFF}}_{1}\ \underbrace{\mathrm{AAAA}}_{2}\ \underset{3}{\mathrm{N}}\ \underset{4}{\mathrm{N}}\ \underset{5}{\mathrm{R}}\ \underset{6}{\mathrm{U}}\ \underset{7}{\mathrm{E}}\ \underset{8}{\mathrm{L}}$$

Al realizar esta agrupación, se puede ver que ahora la palabra se compone únicamente de 8 letras en donde la única letra que se repite es la letra N (x2). Por lo que la formula a aplicar es la siguiente:

$$P_n^r = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \ldots * n_r!}$$

$$\begin{aligned}
&Donde:\\
&n = 8\ , representa\ el\ numero\ total\ de\ letras\ en\ la\ palabra\\
&n_1 = 1\ , veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ F\\
&n_2 = 1\ , veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ A\\
&n_3 = 2\ , veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ N\\
&n_4 = 1\ , veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ R\\
&n_5 = 1\ , veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ U\\
&n_6 = 1\ , veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ E\\
&n_7 = 1\ , veces\ que\ se\ repite\ la\ letra\ L
\end{aligned}$$

$$P_8^7 = \frac{8!}{1! * 1! * 2! * 1! * 1! * 1! * 1!} = \mathbf{20,160}$$

2. El segunda paso es restar el número de disposiciones en el que las letras A y F están juntas al número total de disposiciones distintas, el cual se calculó en el inciso anterior.

$$total\ de\ disposiciones - disp.\ A's\ y\ F's\ juntas = disp.\ A's\ y\ F's\ separadas$$

$$21{,}621{,}600 - 20{,}160 = 21{,}601{,}440$$

**R//Un total de $21,601,440$ disposiciones de las letras no tienen las A juntas y las F juntas.**

**TEMA 3** (25 puntos)

Hay 10 secciones de curso MB1. Hay 6 licenciados y 6 ingenieros que pueden dar el curso. De cuántas formas se puede llevar a cabo la asignación de catedráticos si

a. No hay restricción
b. La mitad de ingenieros y la mitad de licenciados
c. Al menos cuatro tienen que ser licenciados

**SOLUCION**

**a. No hay restricciones**

Al no tener restricciones, no se harán distinciones entre licenciados e ingenieros. Por lo tanto se tiene un único grupo de 12 profesores de donde se deben escoger únicamente 10, sin importar el orden. Por lo que se debe calcular una combinatoria utilizando la siguiente fórmula:

$$nCr = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\begin{aligned}&Donde: \\ &n = 12\,, número\ profesores\ que\ pueden\ dar\ el\ curso \\ &r = 10\,, número\ de\ profesores\ a\ seleccionar\end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta, sustituyendo valores en la fórmula, sería:

$$12P10 = \frac{12!}{10!\,(12-10)!} = \frac{12!}{10! * 2!} = \mathbf{66\ formas}$$

**b. La mitad de ingenieros y la mitad de licenciados**

Para este caso, se tomaran 5 ingenieros del grupo de 6 sin importar el orden ya que todos son del mismo tipo. Lo mismo se hace con el grupo de licenciados, donde se tomaran 5 licenciados del grupo de 6 sin importar el orden. Estas combinatorias se multiplicaran entre sí para encontrar el número total de asignaciones en las que la mitad sean licenciados y la mitad ingenieros.

$$6C5 * 6C5 = \frac{6!}{5!\,(6-1)!} * \frac{6!}{5!\,(6-1)!} = \mathbf{36\ formas}$$

De un grupo de 6 licenciados se toman 5, sin importar el orden.

De un grupo de 6 ingenieros se toman 5, sin importar el orden.

**c. Al menos cuatro tiene que ser licenciados**

Para este inciso se tienen tres opciones, para que se cumpla la condición de que al menos 4 licenciados formen parte del grupo seleccionado:

1. Que sean 4 licenciados y 6 ingenieros

$$\underbrace{6C4}_{\text{Licenciados}} * \underbrace{6C6}_{\text{Ingenieros}} = 15\ formas$$

2. Que sean 5 licenciados y 5 ingenieros

$$\underbrace{6C5}_{\text{Licenciados}} * \underbrace{6C5}_{\text{Ingenieros}} = 36\ formas$$

3. Que sean 6 licenciados y 4 ingenieros.

$$\underbrace{6C6}_{\text{Licenciados}} * \underbrace{6C5}_{\text{Ingenieros}} = 15\ formas$$

Para obtener la respuesta final, se deben sumar la cantidad que resulta en cada una de las opciones que cumplen la condición, de que al menos 4 de los integrantes del grupo seleccionado sea licenciado.

$$15 + 36 + 15 = \mathbf{66\ formas}$$

**Tema 4** (25 Pts.)

¿Cuál es el valor del coeficiente de $r^3h^6$ en $(3\mathrm{r} - 2\mathrm{h})^9$?

**SOLUCION**

Para este tema se debe aplicar el teorema del binomio, el cual está definido de la siguiente manera:

El teorema del binomio es una fórmula con la cual se puede escribir directamente los términos del desarrollo de una potencia entera y positiva de un binomio.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

Si se analiza la fórmula, se puede inducir que el coeficiente de cada uno de los términos, del desarrollo del polinomio, es la expresión:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Se observar que es la misma expresión que se utiliza para calcular la combinatoria expresada de la siguiente manera:

$$nCk = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Haciendo el análisis podemos concluir que cada uno de los términos, del desarrollo de un polinomio, esta expresado de la siguiente manera:

$$(nCk) * x^{n-k}y^{k}$$

Para la resolución de este problema debemos utilizar los siguientes datos

$$(\underbrace{3r}_{x} - \underbrace{2h}_{y})^{9} \leftarrow n$$

Si nos están pidiendo:

$$r^{3}h^{6}$$

$$\boxed{n-k} \quad \boxed{k}$$

Por lo tanto la respuesta se obtendría de la siguiente manera:

$$(9C6) * (3r)^{3} * (-2h)^{6} = 145{,}152r^{3}h^{6}$$

**R// El coeficiente de $r^3h^6$ en $(3r-2h)^9$ es $145,152$**