UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-960-2-M-2-00-2017sB

CURSO:	**Matemática para Computación 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**960**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Septiembre de 2017**
REVISION DEL EXAMEN:	**Lic. Carlos A. Morales S.**
SOLUCION DEL EXAMEN:	**Luis Ramírez**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MATEMATICA DE COMPUTO 1 **2do. examen parcial**
Lic. Carlos A. Morales S. **2do. semestre 2017**

TEMARIO "LUVSAR"

TEMA 1 (20/100)

a) **Utilice leyes de la teoría de conjuntos para demostrar la Ley de Absorción**
b) **Utilice tablas de pertenencia para demostrar las Leyes de De Morgan**

TEMA 2 (25/100)

Se define la función F de R^3 en R^3 así: $F(x, y, z) = (y + 6,\ 5z,\ x - 4)$

a) **Demuestre que F es inyectiva y sobreyectiva**
b) **Hallar la función inversa de F**

TEMA 3 (30/100)

a) **Demostrar que la relación $R = \{(x, y) \in Z \times Z \ / \ y - x \ es\ un\ múltiplo\ de\ 5\}$ es una relación de equivalencia.**
b) **Describir la partición de Z definida por R.**
c) **Escribir todas las clases de equivalencia.**

TEMA 4 (20/100)

Sea el universo $U = [0, 2]$. Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ es definido el conjunto:
$A_n = [0, 1 - 0.5^n]$

a) **Hallar el complemento de A_n**
b) **Hallar la diferencia simétrica entre A_n y A_{n+1}**
c) **Hallar: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n$**
d) **Hallar: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n$**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática para Computación 1**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 20 puntos

a) Utilice leyes de la teoría de conjuntos para demostrar la Ley de Absorción

Ley de Absorción

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Demostración

Conjuntos	Propiedades/Leyes
$\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{\mathcal{U}}$	Propiedad de Neutro
$\boldsymbol{A} \cap ((\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \overline{(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})})$	Propiedad de Inversos
$\boldsymbol{A} \cap ((\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}))$	Ley de DeMorgan
$(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})) \cup (\boldsymbol{A} \cap (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}))$	Distributividad
$(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})) \cup (\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}})$	Asociatividad
$(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})) \cup (\emptyset \cap \overline{\boldsymbol{B}})$	Propiedad de Inverso
$\left(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})\right) \cup \emptyset$	Dominación
$\left(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})\right)$	Propiedad de Neutro

b) Utilice las tablas de pertenencia para demostrar las leyes de DeMorgan

Ley de DeMorgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Demostración

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$	$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}}$	$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\overline{\boldsymbol{B}}$	$\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Tema 2: 25 puntos

Se define la función F de R^3 en R^3 así:

$$\mathrm{F(x,y,z) = (y+6{,}5z, x-4)}$$

a) Demuestre que F es Inyectiva y Sobreyectiva

Demostración Inyectiva

$$\boldsymbol{f(\alpha) = f(\beta)}$$

Dónde $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$; $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ por lo tanto $f(a_1, a_2, a_3) = f(b_1, b_2, b_3)$

f_y	$a_1 + 6 = b_1 + 6$	$a_1 = b_1$
f_z	$5a_2 = 5b_2$	$a_2 = b_2$
f_x	$a_3 - 4 = b_3 - 4$	$a_3 = b_3$

Demostración Sobreyectiva

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = (a,b,c)}$$

$a = y + 6$	$b = 5z$	$c = x - 4$
$y = a - 6$	$z = b/5$	$x = c + 4$

No existen restricciones por lo que $y(a)$; $z(b)$; $x(c)$ es sobreyectiva

b) Hallar la función Inversa de F

$$f(x,y,z) = (a,b,c)$$

$$F^{-1}F\left(c+4, a-6, \frac{b}{5}\right) = F^{-1}(a,b,c)$$

$$F^{-1}(x,y,z) = (z+4, x-6, y/5)$$

Tema 3: 30 puntos

a) Demostrar que la relación $R = \{(x, y) \epsilon Z \times Z / \; y - x \; es \; múltiplo \; de \; 5\}$ es una relación de equivalencia.

Reflexividad $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

$$y - x = 5k$$
$$x - x = 0 \;\Rightarrow 5(0) \in \mathbb{Z} \;\therefore (x, x) \in \mathcal{R}$$

Simetría$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \Rightarrow (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

$$(x, y) \Rightarrow \; y - x = 5k$$
$$-[y - x = 5k] \;\Rightarrow\; -y + x = -5k$$
$$x - y = 5(-k) \;\in \mathbb{Z} \;\therefore (y, x) \in \mathcal{R}$$

Transitiva $[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})] \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$

$$y - x = 5k_1$$
$$\underline{+z - y = 5k_2}$$
$$z + y - y - x = 5k_1 + 5k_2$$

$$z - x = 5(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z} \therefore (x, z) \in \mathcal{R}$$

b) Describir la partición de Z definida por R

$$\mathbb{P} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$$

Siendo $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ los residuos de un número k al ser divido por 5

c) Escribir todas las clases de equivalencia

$$y - x = 5k; \; x = 0$$
$$y = 5k$$

Sí $x = 0$

$$[0] = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$$

$$y - x = 5k; \; x = 1$$
$$y = 5k + 1$$

Sí $x = 1$

$$[1] = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$$

$$y - x = 5k; \; x = 2$$
$$y = 5k + 2$$

Sí $x = 2$

$$[2] = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$$

$$y - x = 5k;\ x = 3$$
$$y = 5k + 3$$

Sí $x = 3$

$$[3] = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$$

$$y - x = 5k;\ x = 4$$
$$y = 5k + 4$$

Sí $x = 4$

$$[4] = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 10, \dots\}$$

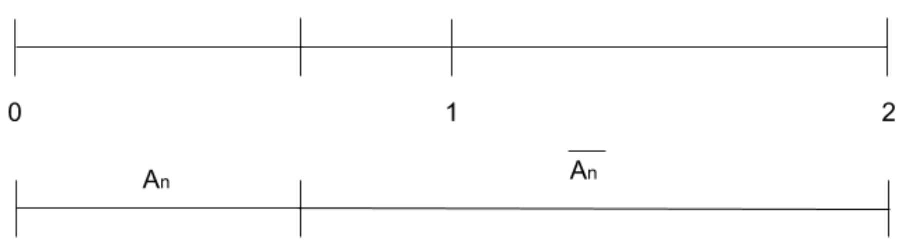
Tema 4: 25 puntos

Sea el universo $U = [0,2]$. Para cada $n = 1,2,3, \dots$ es definido el conjunto:

$$A_n = [0, 1 - 0.5^n]$$

a) Hallar el complemento de A_n

$$\overline{A_n} = (1 - 0.5^n, 2]$$

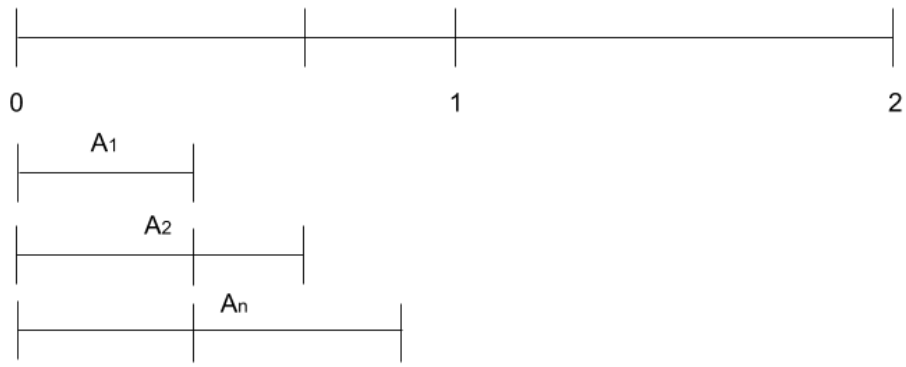


b) Hallar la diferencia simétrica entre A_n y A_{n+1}

$$A_n \triangle A_{n+1} = (A_n \cup A_{n+1}) - (A_n \cap A_{n+1})$$
$$A_n \triangle A_{n+1} = A_{n+1} - A_n$$
$$A_n \triangle A_{n+1} = (1 - 0.5^n, 1 - 0.5^{n+1}]$$

c) Hallar: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$$



d) Hallar: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n$$