UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-962-1-M-2-2017

CURSO:	**Matemática para Computación 2**
SEMESTRE:	**Primer**
CÓDIGO DEL CURSO:	**962**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Agosto 2017**
REVISION DEL EXAMEN:	**Ing. Carlos Garrido**
SOLUCION DEL EXAMEN:	**José Portillo**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería

Escuela Técnica

Matemática para Computación 2

Primer Parcial

18/08/2017

Temario A

TEMA 1(25 Pts.)

Resuelva la relación de recurrencia $a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 3 + 2n$.

TEMA 2(25 Pts.)

Determine las constantes b y c si $a_n = C_1 + C_2(7^n),\ n \geq 0,$ es la solución general de la relación $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0;\ n \geq 0;$

TEMA 3(35 Pts.)

Resuelva la siguiente relacion de recurrencia.

$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n - 3^{n+1} = 0 \qquad a_0 = 0; \quad a_1 = 1;$

TEMA 4(15 Pts.)

Encuentre una relación de recurrencia cuya solución pueda ser

$$a_n = C_1(2^{-n}) + 3^n(C_2 \cos\frac{\pi}{3}n + C_3 \sin\frac{\pi}{3}n) + C_4(-1)^n$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1:
Resuelva la relación de recurrencia $a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 3 + 2n$.

$$a_n = a_n^{(H)} + a_n^{(P)}$$

Solución homogénea:

$$a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0 \quad (1)$$

$$a_n = cr^n \quad (2)$$

Evaluando la ecuación (2) en la ecuación (1)

$$cr^{n+3} - cr^{n+2} + cr^{n+1} - cr^n = 0$$

$$cr^n r^3 - cr^n r^2 + cr^n r - cr^n = 0$$

$$cr^n(r^3 - r^2 + r - 1) = 0$$

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0$$
$$r1 = 1; \quad r2 = +i; \quad r3 = -i$$

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$k = \sqrt{0^2 + 1^2}$$

$$\boxed{k = 1}$$

$$Tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$Tan\theta = \alpha$$

$$\boxed{Tan\theta = \frac{\pi}{2}}$$

$$a_n^{(H)} = C_1(1)^n + C_2Cos(\pi/2n) + C_3Sen(\pi/2n)$$

$$\boxed{a_n^{(H)} = C_1 + C_2Cos(\pi/2n) + C_3Sen(\pi/2n)}$$

Solución Particular

$$a_n^{(P)} = A + Bn$$

$$a_n^{(P)} = A + Bn^2$$

$$3 + 2n \to A + Bn$$

$$3 + 2n \to An + Bn^2$$

$$A(n+3) + B(n+3)^2 - A(n+2) - B(n+2)^2 + A(n+1) + B(n+1)^2 - An - Bn^2 = 3 + 2n$$

Desarrollando los binomios y simplificando la ecuación:

$$A(n+3) + B(n^2+6n+9) - A(n+2) - B(n^2+4n+4) + A(n+1) + B(n^2+2n+1) - An - Bn^2 = 3 + 2n$$

Eliminando términos iguales

$$3A + 6Bn + 9B - 2A - 4Bn + 4B + A + 2Bn + B = 3 + 2n$$

$$2A + 4Bn + 6B = 3 + 2n$$

$$4B\cancel{n} = 2 \qquad 2A + 6B = 3$$

$$B = 1/2; \qquad 2A + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$A = 0;$$

$$an^{(P)} = An + Bn^2$$

$$\boxed{an^{(P)}\ 1/2n^2}$$

SOLUCION GENERAL:

$$an = an^{(H)} + an^{(P)}$$

$$\boxed{an = C_1 + C_2 cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + C_3 Sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{1}{2n^2}}$$

TEMA 2

Determine las constantes b y c si $a_n = C_1 + C_2(7^n), n \geq 0,$ es la solución general de la relación $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0; n \geq 0;$

$a_n = cr^n$

$a_n = c1(1)^n + c2(7)^n$

Tomando a r1 = 1 y a r2 = 7

Se tiene lo siguiente:

$$cr^{n+2} + b * cr^{n+1} + c * cr^n = 0$$

$$cr^n * r^2 + b * cr^n * r^1 + c * cr^n = 0$$

$$cr^n(r^2 + br + c) = 0$$

$$r^2 + br + c = 0$$

Sustituyendo r1 y r2 en la ecuación anterior se obtiene:

Para r1 = 1;

$$1^2 + b(1) + c = 0$$

$$1 + b + c = 0$$

$$b + c = -1$$

$$b = -1 - c \qquad \textbf{(1)}$$

Para r2 = 7

$$7^2 + b(7) + c = 0$$

$$49 + 7b + c = 0$$

$$7b + c = -49 \qquad \textbf{(2)}$$

Ahora se realiza la respectiva sustitución para ello se tomara la ecuación (1) y se sustituye en la (2)

$$7(-1-c)+c = -49$$

$$-7c-7+c = -49$$

$$\boxed{c = 7}$$

$$b = -1-c$$

$$b = -1-7$$

$$\boxed{b = -8}$$

TEMA 3

Homogénea

$\boldsymbol{a_0 = a_{n+2} + 3a_{n+1} = 2a_n = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{a_n = cr^n}$

$\boldsymbol{cr^{n+2} + 3cr^{n+1} + 2cr^n = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{n = 0;}$

$\boldsymbol{r^2 + r + 2 = 0}$

$\boldsymbol{(r+2)(r+1) = 0}$

$\boldsymbol{r1 = -2}$

$\boldsymbol{r2 = -1}$

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = A(-2)^2 + b(-1)^n}}$$

Particular

$\boldsymbol{a_n = a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^{n+1}}$ $\quad$ $\boldsymbol{a_n = C3^n}$

$\boldsymbol{C3^{n+2} + 3C3^{n+1} + 2a_n = 3^{n+1}}$

$\boldsymbol{3^nC3^2 + 3C3^n * 3 + 2C3^n = 3^n3}$ $\quad$ *dividiendo por 3^n

$\boldsymbol{9C + 9C + 2C = 3}$

$\boldsymbol{20C = 3}$ $\quad$ $\boxed{\boldsymbol{C = \frac{3}{20}}}$

General

$$\boldsymbol{a_n = A(-2)^n + B(-1)^n + \frac{3}{20} * 3^n}$$

$\boldsymbol{0 = A + A + \frac{3}{20}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n = 0;}$ $\qquad$ $\boldsymbol{0 = A + B + \frac{3}{20}}$

$\boldsymbol{1 = -2A - B + \frac{9}{20}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n = 1;}$ $\qquad$ $\boldsymbol{B = -A - \frac{3}{20}}$

$\boldsymbol{1 = -A + 0 + \frac{12}{20}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{B = -\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{20}}$

$\boldsymbol{A = \frac{12}{20} - 1 = -\frac{2}{5}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{B = \frac{1}{4}}$

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = -\frac{2}{5}(-2)^n + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{20}(3)^n}}$$

TEMA 4

Encuentre una relación de recurrencia cuya solución pueda ser

$$a_n = C_1(2^{-n}) + 3^n(C_2 \cos\frac{\pi}{3}n + C_3 \sin\frac{\pi}{3}n) + C_4(-1)^n$$

$$a_n = C_1(1/2)^n + 3^n\left(C_2 cos\frac{\pi}{3}n + C_3 sen\frac{\pi}{3}n\right) + C_4(-1)^n$$

<u>Extrayendo raíce</u>

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad r_2 = -1 \quad r_3 = \alpha + \beta i \quad r_4 = \alpha - \beta i$$

$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ $\theta = Tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$3 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ $\frac{\pi}{3} = Tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$\boxed{9 = \alpha^2 + \beta^2}$ $Tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\beta}{\alpha}$ $\boxed{\beta = \sqrt{3}\alpha}$

<u>Sustituyendo</u>

$9 = \alpha^2 + 3\alpha^2$ $\beta = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\right)$

$9 = 4\alpha^2$ $\beta = 3\sqrt{3}/2$

$\alpha = \frac{3}{2}$

Obteniendo los nuevos valores de las raíces quedarían de la siguiente forma:

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad r_2 = -1 \quad r_3 = \frac{3}{2} + 3\sqrt{3}/2i \quad r_4 = \frac{3}{2} - 3\sqrt{3}/2i$$

$$(r - r1)(r - r2)(r - r3)(r - r4) = 0$$

$$(r - 1/2)(r + 1)\left(r - \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}i\right)\left(r - \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

$$\left(r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\right)(r^2 - 3r + 9) = 0$$

$$r^4 - \frac{5}{2}r^3 + 7r^2 + 6r - \frac{9}{2} = 0$$

<u>Multiplicando por Cr^n</u>

$$Cr^n r^4 - \frac{5}{2}r^3 Cr^n + 7r^2 Cr^n + 6rCr^n - \frac{9}{2}Cr^n = 0$$

$$Cr^{n+4} - \frac{5}{2}Cr^{n+3} + 7Cr^{n+2} + 6Cr^{n+1} - \frac{9}{2}Cr^n = 0$$

$$\boxed{a_{n+4} - \frac{5}{2}a_{n+3} + 7a_{n+2} + 6a_{n+1} - \frac{9}{2}a_n = 0}$$