UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO: Matemática Intermedia 1

JORNADA: Matutina

SEMESTRE: 1er. Semestre

AÑO: 2015

TIPO DE EXAMEN: 1er. Examen Parcial

NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN: Josue Fernando Tojes Pacheco

NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN: Ing. Arturo Samayoa

TEMARIO "B"

Tema No. 1 (10 Puntos)

Utilizando el método de eliminación de Gauss, encuentre la solución del siguiente problema: Una herencia de Q12,000.00 se invirtió en tres fondos: un fondo de mercado de dinero que paga 3% anualmente, bonos municipales que paga 4% anualmente y fondos mutuos que paga 2% anualmente. La cantidad invertida en fondos mutuos fue Q 4,000.00 más que la invertida en bonos municipales. El interés total ganado durante el primer año fue de Q340.00. Encuentre la cantidad invertida en cada tipo de fondo o muestre que la información es insuficiente o incorrecta ya que es inconsistente. Razone su respuesta.

Tema No. 2 (9 Puntos)

Determine los valores de K tal que el sistema de X & Y tenga: i) Sol. única. ii) Ninguna iii) Infinitas soluciones. Razone su respuesta.

$$\begin{aligned} X + KY &= 1 \\ KX + Y &= K \end{aligned}$$

Tema No. 3 (16 Puntos)

a) Encuentre el determinante utilizando la segunda columna, por cofactores.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

b) Encuentre el valor numérico del determinante $\begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \\ -a-d & -b-e & -c-f \end{vmatrix}$

Utilizando propiedades del determinante y el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$

Tema No. 4 (12Puntos)

Cada una de las siguientes matrices, son matrices aumentadas. Encuentre la solución del sistema que representan si tiene solución única o infinitas, nombre las incógnitas como lo desee.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

Tema No. 5 (15 Puntos)

Dado el sistema:

$$\begin{aligned} X - Y &= -4 \\ X - 2Y &= 2 \end{aligned}$$

a) Encuentre la matriz inversa de la matriz de coeficientes por (indicando procedimiento):

i) $(A \vdots I) \rightarrow (I \vdots A^{-1})$ (4 pts.) ii) La matriz Adjunta. (4 pts.)

b) Utilizando la matriz inversa encuentre la solución del sistema. $X = A^{-1}B$ (2 pts.)

c) AA^t (2 pts.)

d) Encuentre la solución por el método de Gauss-Jordan. (3 pts.)

Tema No. 6 (38 Puntos)

a) ¿Cuál es el primer paso cuando se integra (solamente explique)? (3 pts c/u)

i) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)(x+1)}\,dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+3x-4}\,dx$

b) Calcule: (8 pts c/u)

i) $\displaystyle\int (x+1)^2 \ln(x+1)\,dx$ ii) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{x+8}{x(x-4)^2}\,dx$ iv) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1

Se plantean las variables:

$$x = Fondos\ mercado\ de\ dinero$$
$$y = Fondos\ bonos\ municipales$$
$$z = Fondos\ mutuos$$

Se plantean 3 ecuaciones para resolver el problema de aplicación:

1. $x + y + z = 12000$
2. $y - z = -4000$
3. $3x + 4y + 2z = 34000$

Se coloca las tres ecuaciones de forma matricial y se utiliza el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 0 & 1 & -1 & -4000 \\ 3 & 4 & 2 & 34000 \end{pmatrix} \rightarrow f_3 = f_3 - 3f_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 0 & 1 & -1 & -4000 \\ 0 & 1 & -1 & -2000 \end{pmatrix} \rightarrow f_3 = f_3 - f_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12000 \\ 0 & 1 & -1 & -4000 \\ 0 & 0 & 0 & 2000 \end{pmatrix}$$

Dado el resultado de la reducción de la matriz, se concluye que la matriz no tiene solución, información incorrecta, es inconsistente.

R:// No tiene solución, información incorrecta, es inconsistente.

TEMA 2

Dado el sistema de ecuaciones se encuentra el determinante y se iguala a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2 = 0$$

Se resuelve la ecuación:
$1 - k^2 = 0$
$k = \pm 1$

Se sustituye los valores de k en la matriz y se resuelve.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow f_2 = f_2 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Infinitas\ soluciones$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow f_2 = f_2 + f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Infinitas\ soluciones$$

Ya que se evaluaron los valores de K se obtienen las respuestas:

i. **Solución única para toda $k \neq \pm 1$**
ii. **Ninguna solución para ningún K**
iii. **Infinitas soluciones: $k = 1$ y $k = -1$**

TEMA 3

a) Utilizando el teorema de cofactores y la segunda columna obtenemos el determinante:

$$\begin{pmatrix} -2 & \boxed{0} & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 2 \\ -2 & \boxed{3} & 3 \end{pmatrix} = \cancel{0 * (-1)^{1+2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} + 2 * (-1)^{2+2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 3 * (-1)^{3+2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0 + \left[2 * (1) * \left(-6 - (-4)\right)\right] + [3 * (-1) * (-4 - 6)]$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0 + [-4] + [30] = 26$$

R:// El determinante de la matriz es 26

b) Se usa propiedades de determinantes

Cada una de las modificaciones que se hagan en las filas y cambios de columnas y/o filas modifica el determinante

$$\begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \\ -a-d & -b-e & -c-f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} f_1 = \dfrac{f_1}{2} \\ f_2 = \dfrac{f_2}{3} \\ f_1 = -f_3 \end{array} \rightarrow (-1)(2)(3) \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow f_3 = f_3 - f_1 \rightarrow (-6) \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} \rightarrow f_1 \leftrightarrow f_3 \rightarrow (-6)(-1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow f_2 \leftrightarrow f_3 \rightarrow (6)(-1) \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{2} = (-6) * (2) = -12$$

Se sustituye el valor de la matriz y se obtiene el valor numérico del determinante

R:// El determinante de la matriz es -12

TEMA 4

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Dada\ la\ matriz\ se\ obtiene\ que\ x = -2\ y\ y = -4}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Soluciones\ infinitas}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{No\ tiene\ soluci\acute{o}n\ ya\ que\ 0 \neq 1}$

TEMA 5

a) Dada la matriz se coloca la inversa a la par para obtener la inversa.

i.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to f_2 = f_2 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to f_2 = -f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to f_1 = f_1 + f_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

ii. Con la matriz, se saca la matriz de cofactores y su determinante

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \left[\left((1) * (-2)\right) - \left((-1) * (1)\right)\right] = -2 - (-1) = -1 = |A|$$

$$a_{11} = (-1)^{1+1}|-2| = -2$$
$$a_{12} = (-1)^{1+2}|1| = -1$$
$$a_{21} = (-1)^{2+1}|-1| = 1$$
$$a_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1$$

$$Matriz\ de\ cofactores = C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C^t = Adj$$

$$Adj = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

b) Dada la siguiente ecuación:

$$X = A^{-1} * B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} (-8) + (-2) \\ (-4) + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-10} \\ \mathbf{-6} \end{bmatrix}$$

c) Dada la siguiente ecuación:

$$A * A^t$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Solución por Gauss Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow f_2 = f_2 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow f_2 = -f_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow f_1 = f_1 + f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-10} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

TEMA 6

a) Primer paso

i. $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)}$ *El primer paso para resolver esta integral es*

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{fracciones\ parciales}\ \mathbf{2)}\ \boldsymbol{Factores\ lineales\ no\ repetidos}$$

ii. $\int \frac{x^3}{x^2+3x-4}$ *El primer paso para resolver esta integral es*

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{Fracci\text{ó}n\ impropia}\ \mathbf{2)}\ \boldsymbol{Primer\ paso\ dividir}$$

b) Calcular

i. $\int (x+1)^2 Ln(x+1)dx$

Realizamos una integral por partes

$$u = Ln(x+1) \qquad dv = (x+1)^2 dx$$
$$du = \frac{1}{(x+1)} dx \qquad v = \frac{(x+1)^3}{3}$$
$$\frac{(x+1)^3}{3} Ln(x+1) - \int \frac{(x+1)^3}{3(x+1)} dx$$
$$\frac{(x+1)^3}{3} Ln(x+1) - \frac{1}{3} \int (x+1)^2 dx$$

$$\frac{(x+1)^3}{3}\ Ln(x+1) - \frac{1}{3}\frac{(x+1)^3}{3}$$

R:// $\boldsymbol{\frac{(x+1)^3}{3}\ Ln(x+1) - \frac{(x+1)^3}{9}} + \mathrm{C}$

ii. $\int Tan^3(x)\ Sec^5(x)\ dx$

Utilizamos identidades trigonométricas y de acuerdo a la integración con exponentes ahorramos un término de Tan x y Sec x.

$$\int Tan^3(x)\ Sec^5(x)\ dx = Tan^2(x)\ Sec^4(x)\ Tan\ (x)\ Sec\ (x)dx$$

Sustituyo $Tan^2(x) = Sec^2(x) - 1$

$$= (Sec^2(x) - 1)\ Sec^4(x)\ Tan\ (x)\ Sec\ (x)dx$$
$$= (Sec^6(x) - Sec^4(x))\ Tan\ (x)\ Sec\ (x)dx$$
$$= \int Sec^6(x)\ \ Tan\ (x)\ Sec\ (x)dx - \int Sec^4(x)\ Tan\ (x)\ Sec\ (x)dx$$

Se hace una sustitución:

$$u = Sec\ (x)$$
$$du = Tan(x)Sec(x)dx$$

$$\int u^6 du - \int u^4 du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C$$

Volvemos a sustituir:

R:// $\boldsymbol{\frac{Sec\ (x)^7}{7} + \frac{Sec\ (x)^5}{5} + C}$

iii.

$$\int \frac{x+8}{x(x-4)^2}$$

Integramos utilizando fracciones parciales

$$\frac{x+8}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-4)} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

Resolvemos las fracciones

$(x+8) = A(x-4)^2 + B(x-4)x + Cx$

$1 = -8A - 4B + C$
$8 = 16A$
$0 = A$+B

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$A = \frac{1}{2} \qquad A = -B \qquad B = -\frac{1}{2}$$
$$1 = -8\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right) + C$$
$$1 = -4 + 2 + C$$
$$1 + 4 - 2 = C = 3$$

Sustituimos los valores en las fracciones parciales

$$\frac{(1/2}{x} + \frac{(-\frac{1}{2})}{(x-4)} + \frac{3}{(x-4)^2}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-4)} + 3\int \frac{dx}{(x-4)^2}$$

Integramos:

$$\textbf{R://} \ \frac{1}{2}Ln(x) - \frac{1}{2}Ln(x-4) - \frac{3}{(x-4)} + c$$

iv.

$$\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2+2x}}$$

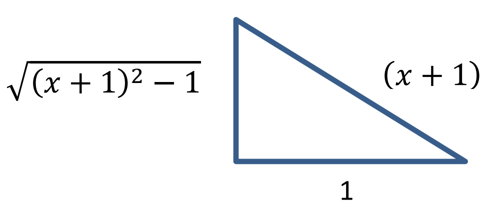
Se realiza una completación al cuadrado.

$$x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

Por lo tanto la integral se transforma de esta manera:

$$\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}}$$

Se resuelve por medio de una sustitución trigonométrica.



$$Sec\,(\theta) = \frac{(x+1)}{1} \qquad x = Sec(\theta) - 1 \qquad dx = Sec(\theta)Tan(\theta)d\theta$$

$$Tan\,(\theta) = \frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{1} \qquad Tan(\theta) = \sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

Sustituimos:

$$\int \frac{Sec(\theta)^3 Sec(\theta)\cancel{Tan(\theta)}d\theta}{\cancel{Tan(\theta)}}$$

$$\int Sec(\theta)^4 d\theta = Sec(\theta)^2 Sec(\theta)^2 d\theta$$

Sustituyo $Sec^2(x) = Tan^2(x) + 1$

$$\int (Tan^2(x) + 1)Sec(\theta)^2 d\theta = \int Tan^2(x)\, Sec(\theta)^2 d\theta + \int Sec(\theta)^2 d\theta$$

Utilizando esta sustitución se integra la primera integral y la segunda es directa.

$$u = Tan(\theta) \quad du = Sec(\theta)^2 d\theta$$

$$\int u^2\, du + \int Sec(\theta)^2 d\theta$$

$$\frac{u^3}{3} + Tan(\theta) + c$$

$$\frac{Tan(\theta)^3}{3} + Tan(\theta) + c$$

R:// $\boldsymbol{\frac{[(x+1)^2-1]^{3/2}}{3} + [(x+1)^2 - 1]^{1/2} + C}$