Universidad San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias
Departamento de Matemática
Clave-112-2-M-1-00-2015

26 de abril de 2015

Curso:	Matemática Intermedia 2.
Semestre:	Primer Semestre
Código del Curso:	112.
Tipo de examen:	Segundo Examen Parcial.
Fecha del Examen:	**17 de marzo del 2015**.
Nombre de la persona que resolvió el examen:	José Ligorría T.
Nombre de la persona que revisó el examen:	

1. Temario

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA MATEMÁTICA INTERMEDIA
2
JORNADA MATUTINA 17 DE MARZO 2015

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

TEMA 1 (20 PUNTOS)

a. Para $e^{xz} + xy = 0$ halle las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita.

b. Para $w = x\ cosyz$, $x = s^2$, $z = s - 2t$ hallar $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$.

TEMA 2 (20 PUNTOS)

Suponga que $V(x, y, z)$ volts es el potencial eléctrico en cualquier punto (x, y, z) del espacio tridimensional y que $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

a. Calcule la tasa de variación de V en el punto $(2, 2, -1)$ en la dirección del vector $2i - 3j + 6k$.

b. Determine el valor de la máxima tasa de variación de V en $(2, 2, -1)$.

c. Determine la dirección de la máxima tasa de variación de V en $(2, 2, -1)$.

TEMA 3 (20 PUNTOS)

Para la superficie $Z = X^2 + Y^2 + 3$ en el punto $P(2, 1, 8)$.

a. Halle una ecuación del plano tangente.

b. Halle las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta normal.

TEMA 4 (20 PUNTOS)

Un contenedor (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. Construir la base costará \$ 5 por pie cuadrado y construir los lados y la parte superior costará \$ 3 por pie cuadrado. Determine las dimensiones de este tamaño que minimicen el costo.

TEMA 5 20 PUNTOS)

La temperatura en un punto (X, Y) es $T(X, Y)$, medida en grados Celsius. Un animalito se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está definida por $X = \sqrt{1 + t}$, $Y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde X y Y se miden en centímetros. La función de la temperatura cumple con $T_X(2, 3) = 4$ y $T_Y(2, 3) = 3$ ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura en la trayectoria del animalito después de 3 segundos?

2. Solución

Tema 1

a. Para $e^{xz} + xy = 0$ halle las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita.

b. Para $w = x\ cosyz$, $x = s^2$, $z = s - 2t$ hallar $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Solución:

a. Para proceder por el método de derivada implícita, necesitmos definir nuestra función $F(x, y, z) = e^{xz} + xy = 0$ de tal manera que $F(x, y, z)$ es matemáticamente igual a cero en lo que nosotros consideramos. Ya con nuestra función procedemos utilizando que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Así necesitamos encontrar F_x,F_y y F_z.

$F_x = z\ e^{xz} + y$
$F_y = x$
$F_z = x\ e^{xz}$

Por lo que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ze^{xz} + y}{xe^{xz}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{xe^{xz}} = \frac{1}{e^{xz}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ze^{xz} + y}{xe^{xz}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{xe^{xz}} = \frac{1}{e^{xz}}}$$

b. Sabemos que:

$$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial s} = \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x(s,t)} \times \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y(s,t)} \times \frac{\partial y(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z(s,t)} \times \frac{\partial z(s,t)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial t} = \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x(s,t)} \times \frac{\partial x(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y(s,t)} \times \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z(s,t)} \times \frac{\partial z(s,t)}{\partial t}$$

Así, calculamos todas las derivadas parciales para luego sustituir y encontrar lo que se pide.

$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x(s,t)}$	$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y(s,t)}$	$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z(s,t)}$	$\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}$	$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t}$	$\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}$	$\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}$	$\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}$	$\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}$
$cos(yz)$	$-xz\ sen(yz)$	$-xy\ sen(yz)$	$2s$	0	0	$2t$	1	-2

Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial s} = (cos(yz)) \times (2s) + (-xz\ sen(yz)) \times (0) + (-xy\ sen(yz)) \times (1)$$
$$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial s} = 2s\ cos((s-2t)t^2) - s^2t^2\ sen((s-2t)t^2)$$
$$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial t} = (cos(yz)) \times (0) + (-xz\ sen(yz)) \times (2t) + (-xy\ sen(yz)) \times (-2)$$
$$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial t} = -[2ts^2(s-2t) - 2s^2t^2]\ sen((s-2t)t^2) = -2ts^2[s-2t-t]\ sen((s-2t)t^2)$$
$$\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial t} = -2ts^2[s-3t]\ sen((s-2t)t^2)$$

$$\boxed{\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial s} = 2scos((s-2t)t^2) - s^2t^2sen((s-2t)t^2} \boxed{\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial t} = -2ts^2[s-3t]sen((s-2t)t^2)}$$

Tema 2

Suponga que $V(x,y,z)$ volts es el potencial eléctrico en cualquier punto (x,y,z) del espacio tridimensional y que $V(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

a. Calcule la tasa de variación de V en el punto $(2,2,-1)$ en la dirección del vector $2i-3j+6k$.

b. Determine el valor de la máxima tasa de variación de V en $(2,2,-1)$.

c. Determine la dirección de la máxima tasa de variación de V en $(2,2,-1)$.

Solución:

a. Para encontrar la derivada direccional de V en el punto y la dirección dicha, necesitamos encontrar el vector gradiente de V evaluado en ese punto y hacer el producto punto de este vector con el vector unitario en la dirección dicha. Es decir: $D_{2i-3j+6k}V(2,2,-1) = \nabla V(2,2,-1)\cdot\dfrac{\langle 2,-3,6\rangle}{\|\langle 2,-3,6\rangle\|}$ Así:

$$\nabla V(x,y,z) = \left\langle \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{3/2}}, \frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{3/2}}, \frac{-2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{3/2}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{3/2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{3/2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{3/2}} \right\rangle$$

Por lo que:

$$\nabla V(2,2,-1) = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}^{3/2}}, \frac{-2}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}^{3/2}}, \frac{-(-1)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}^{3/2}} \right\rangle = \left\langle \frac{-2}{9^{3/2}}, \frac{-2}{9^{3/2}}, \frac{-(-1)}{9^{3/2}} \right\rangle$$

Así: $\nabla V(2,2,-1) = \left\langle \dfrac{-2}{27}, \dfrac{-2}{27}, \dfrac{-(-1)}{27} \right\rangle$

Además,

$$\frac{\langle 2,-3,6\rangle}{\|\langle 2,-3,6\rangle\|}\rangle = \frac{\langle 2,-3,6\rangle}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$$

Por lo tanto:

$$D_{2i-3j+6k}V(2,2,-1) = \nabla V(2,2,-1)\cdot\frac{\langle 2,-3,6\rangle}{\|\langle 2,-3,6\rangle\|} = \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle\cdot\left\langle \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle = \frac{-2(2)}{27(7)} + \frac{-2(-3)}{27(7)} + \frac{1(6)}{27(7)} = \frac{8}{189}$$

$$\boxed{D_{2i-3j+6k}V(2,2,-1) = \frac{8}{189}}$$

b. Empezamos calculando la magnitud del vector gradiente, que es la dirección que tiene máxima tasa de variación. Así:

$$\|\nabla V(2,2,1)\| = \left\| \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle \right\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{27}\right)^2 + \left(\frac{-2}{27}\right)^2 + \left(\frac{1}{27}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4+1}{27^2}} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$ Por lo tanto:

$$D_{\nabla V(2,2,1)}V(2,2,-1) = \nabla V(2,2,-1) \cdot \frac{\left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle}{\left\| \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle \right\|} = \frac{\left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle}{\left\| \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle \right\|}$$

$$D_{\nabla V(2,2,1)}V(2,2,-1) = \frac{\left\| \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle \right\|^2}{\left\| \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle \right\|} = \left\| \left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle \right\| = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{D_{\nabla V(2,2,1)}V(2,2,-1) = \frac{1}{9}}$$

c. Por lo dicho en el inciso anterior, la dirección de máxima tasa de variación de V en $(2,2,-1)$ es $\left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle$

$$\boxed{\left\langle \frac{-2}{27}, \frac{-2}{27}, \frac{1}{27} \right\rangle}$$

Tema 3

Para la superficie $Z = X^2 + Y^2 + 3$ en el punto $P(2, 1, 8)$.

a. Halle una ecuación del plano tangente.

b. Halle las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta normal.

Solución:

a. Para encontrar las ecuaciones del plano tangente necesitamos un punto en el plano y un vector normal a la superficie. Con este objetivo definimos la función $f(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + 3 - Z$ y observamos que entonces nuestra superficie corresponde a $f^{-1}(0)$. Además sabemos que el punto $P(2, 1, 8)$ pertenece al plano y que el vector gradiente de $f(X, Y, Z)$ evaluado en ese punto es perpendicular al plano. Por lo que procedemos a encontrar el vector gradiente de $f(X, Y, Z)$.
$\nabla f(x, y, z) = \left\langle \frac{\partial f(X,Y,Z)}{\partial X}, \frac{\partial f(X,Y,Z)}{\partial Y}, \frac{\partial f(X,Y,Z)}{\partial Z} \right\rangle = \langle 2X, 2Y, -1\rangle$
Así, $\nabla f(2, 1, 8) = \langle 2(2), 2(1), -1\rangle = \langle 4, 2, -1\rangle$
Como ya tenemos nuestro vector y punto, entonces todo punto (x,y,z) sobre nuestro plano tangente cumple que:
$\langle x, y, z\rangle - \langle 2, 1, 8\rangle$ es un vector que vive en el plano y así es perpendicular al vector normal.Por lo tanto:
$(\langle x, y, z\rangle - \langle 2, 1, 8\rangle) \cdot \langle 4, 2, -1\rangle = 0 \Leftrightarrow 4(x-2)+2(y-1)-1(z-8) = 0 \Leftrightarrow 4x+2y-z-8-2+8 = 4x + 2y - z - 2 = 0$
$\boxed{4x + 2y - z - 2 = 0}$

b. Ahora bien, como ya tenemos un punto de la recta y su vector dirección tenemos que nuestras ecuaciones paramétricas (con parámetro t) cumplen que:
$\langle \widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t), \widetilde{z}(t)\rangle = \langle 2, 1, 8\rangle + t\nabla f(2, 1, 8) \Leftrightarrow$

$\widetilde{x}(t) = 4t + 2$
$\widetilde{y}(t) = 2t + 1$
$\widetilde{z}(t) = 08 - t$

Así, las simétricas son (el despeje de t en las paramétricas):
Para $\widetilde{x}(t) = 4t + 2 \to t = \frac{\widetilde{x}(t) - 2}{4}$
Para $\widetilde{y}(t) = 2t + 1 \to t = \frac{\widetilde{y}(t) - 1}{2}$
Para $\widetilde{z}(t) = 08 - t \to t = 8 - \widetilde{z}(t)$

$\boxed{\widetilde{x}(t) = 4t + 2 \qquad \widetilde{y}(t) = 2t + 1 \qquad \widetilde{z}(t) = 8 - t}$

$\boxed{\frac{\widetilde{x}(t) - 2}{4} = \frac{\widetilde{y}(t) - 1}{2} = 8 - \widetilde{z}(t)}$

Tema 4

Un contenedor (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. Construir la base costará \$ 5 por pie cuadrado y construir los lados y la parte superior costará \$ 3 por pie cuadrado. Determine las dimensiones de este tamaño que minimicen el costo.

Solución:

Procederemos por el método de multiplicadores de Cauchy. Por lo que definimos lo siguiente:

x	El ancho del contenedor.
y	El largo del contenedor,
z	La altura del contenedor.

Así queremos minimizar el costro del contenedor, el cual esta dado por la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = 5xy + 3(xy + 2xz + 2yz)$ y si tenemos la función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y, z) = xyz - 480$, buscamos:

Minimizar $f(x, y, z)$ sujeto a $(x, y, z) \in D := \{(\xi, \eta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 | g(\xi, \eta, \gamma) = 0\}$

Así, el teorema de Lagrange nos dice que si (x^*, y^*, z^*) es un óptimo de $f(x, y, z)$ en D entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tal que:

$\nabla f(x^*, y^*, z^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*, z^*)$

Así, como:

$\nabla f(x, y, z) = \{8y + 6z, 8x + 6z, 6x + 6y\}$

$\nabla g(x, y, z) = \{yz, xz, xy\}$

Entonces $\langle 8y^* + 6z^*, 8x^* + 6z^*, 6x^* + 6y^* \rangle = \lambda \langle y^*z^*, x^*z^*, x^*y^* \rangle$

De donde:

$(I) \to 8y^* + 6z^* = \lambda y^*z^*$

$(II) \to 8x^* + 6z^* = \lambda x^*z^*$

$(III) \to 6x^* + 6y^* = \lambda x^*y^*$

$(IV) \to x^*y^*z^* - 480 = 0$

$(V) \to x^*(I) - y^*(II) \to 6z^*(x^* - y^*) = 0$

$(VI) \to y^*(II) - z^*(III) \to 2x^*(4y^* - 3z^*) = 0$

Como $x^* \neq 0 \neq y^* \neq 0 \neq z^*$ entonces, de (V) y (VI) tenemos que:

$x^* = y^*$

$\frac{4}{3}y^* = z^*$

Y sustituyendo en (IV):

$(y^*)y^*(\frac{4}{3}y^*) - 480 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(y^*)^3 = 480 \Leftrightarrow (y^*)^3 = 480 \times \frac{3}{4} = 360$

Así: $x^* = y^* = \sqrt[3]{360} = 2\sqrt[3]{45}$ y $z^* = \frac{4}{3}(2\sqrt[3]{45}) = \frac{8\sqrt[3]{45}}{3}$

$$\boxed{x^* = 2\sqrt[3]{45} \qquad y^* = 2\sqrt[3]{45} \qquad z^* = \frac{8\sqrt[3]{45}}{3}}$$

Tema 5

La temperatura en un punto (X, Y) es $T(X, Y)$, medida en grados Celsius. Un animalito se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está definida por $X = \sqrt{1+t}$, $Y = 2+\frac{1}{3}t$, donde X y Y se miden en centímetros. La función de la temperatura cumple con $T_X(2,3) = 4$ y $T_Y(2,3) = 3$ ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura en la trayectoria del animalito después de 3 segundos?

Solución:

Queremos la razón de cambio de $T(X, Y)$ cuando $X = \sqrt{1+t}$, $Y = 2 + \frac{1}{3}t$ en el tiempo $t = 3$, es decir necesitamos la siguiente razón de cambio:

$$\frac{\partial T(X,Y)}{\partial t} = \frac{\partial T(X,Y)}{\partial X(t)} \times \frac{\partial X(t)}{\partial t} + \frac{\partial T(X,Y)}{\partial Y(t)} \times \frac{\partial Y(t)}{\partial t}$$

Para luego evaluarla en $t = 3$ y tener la que deseamos. Así encontramos las derivadas parciales que necesitamos.

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$$

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial T(X,Y)}{\partial t}|_{t=3} = \frac{\partial T(X,Y)}{\partial X(t)}_{t=3} \times \frac{\partial X(t)}{\partial t}_{t=3} + \frac{\partial T(X,Y)}{\partial Y(t)}_{t=3} \times \frac{\partial Y(t)}{\partial t}_{t=3} = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{1+3}}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = 2$$

$$\boxed{\frac{\partial T(X,Y)}{\partial t}|_{t=3} = 2}$$