UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-112-2-V-1-00-2015-sP

CURSO:	Matemática Intermedia 2
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	112
TIPO DE EXAMEN:	Segundo Parcial
JORNADA:	Vespertina
FECHA DE EXAMEN:	10 de abril de 2015
NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Marvin Aguilar

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEMÁTICA INTERMEDIA 2
JORNADA VESPERTINA
PRIMER SEMESTRE, 2015

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

TEMA 1 (33 puntos)

Encuentre la máxima razón de cambio de $f(x,y) = Ln(x^2 + y^2)$ en $p(1,2)$. ¿En qué dirección se verifica?

TEMA 2 (33 puntos)

Trace la región de integración y cambie el orden de integración de:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)dxdy$$

TEMA 3 (34 puntos)

Usando polares halle el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ y el plano $z = 4$.

-SOLUCIÓN DEL EXAMEN-

TEMA 1 (33 puntos)

Encuentre la máxima razón de cambio de $f(x,y) = Ln(x^2 + y^2)$ en $p(1,2)$. ¿En qué dirección se verifica?

SOLUCIÓN

La máxima razón de cambio se puede obtener mediante la magnitud del vector gradiente, de la siguiente manera:

$$\bar{V}f(x,y) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$$

$$\bar{V}f(x,y) = \langle \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \rangle$$

Evaluando en el punto (1,2).

$$\bar{V}f(x,y) = \langle \frac{2(1)}{1^2 + 2^2}, \frac{2(2)}{1^2 + 2^2} \rangle = \langle \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \rangle$$

La magnitud del vector gradiente es:

$$|\bar{V}f(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{4/5} \cong 0.894427$$

La dirección en que se verifica, es en la dirección del gradiente: $\langle \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

R/

LA MÁXIMA RAZÓN DE CAMBIO ES $\sqrt{4/5} \cong 0.894427$

Y LA DIRECCIÓN EN QUE SE VERIFICA $\langle \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \rangle$.

<u>TEMA 2</u> <u>(33 puntos)</u>

Trace la región de integración y cambie el orden de integración de:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)dxdy$$

<u>SOLUCIÓN</u>

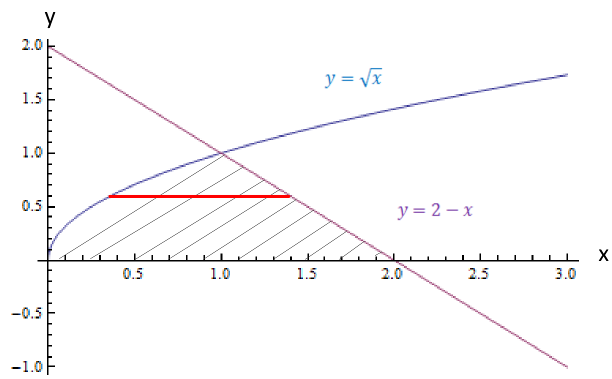
Para saber la forma del área de integración, se debe igualar cada uno de los límites de la primera integral a x.

$$y^2 = x \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{x}$$

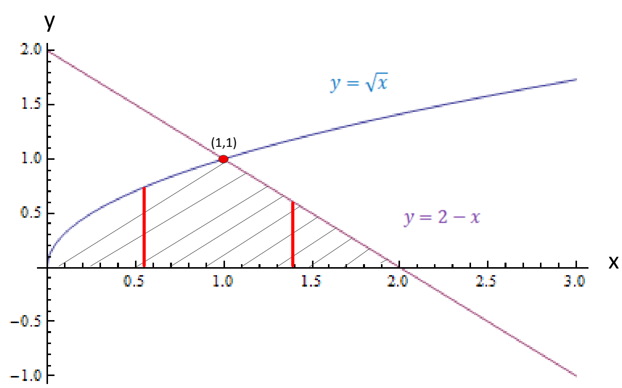
(Se toma solo la parte positiva, debido a los límites de integración de la segunda integral).

$$2 - y = x \quad \rightarrow \quad y = 2 - x$$

Graficando:



Dada la forma de la región de integración, al cambiar el orden de integración (diferenciales verticales), se necesita de dos integrales dobles para calcular la región de integración.



La transformación queda de la siguiente manera:

R/

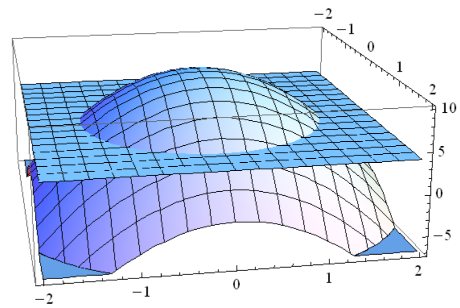
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)dydx$$

TEMA 3 (34 puntos)

Usando polares halle el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ y el plano $z = 4$.

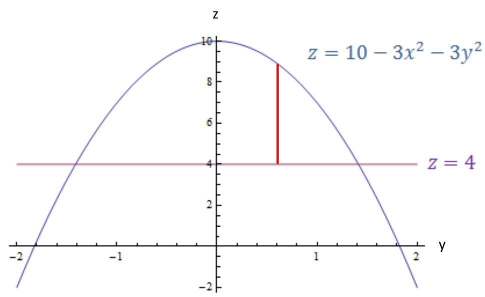
SOLUCIÓN

El volumen formado es:



Se graficarán las trazas para observar los límites de las integrales.

Traza yz



Por lo tanto la función de la altura está determinada por:

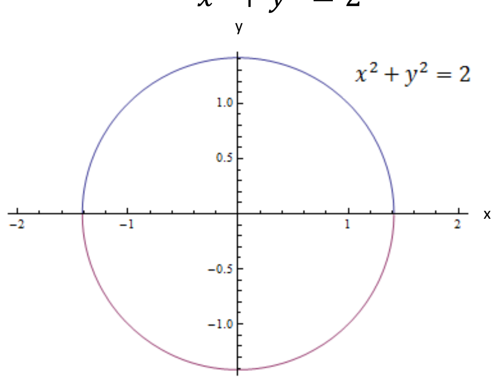
$$z_{sup} - z_{inf} = 10 - 3x^2 - 3y^2 - (4) = \mathbf{6 - 3x^2 - 3y^2}$$

En polares:

$$\boldsymbol{h = 6 - 3x^2 - 3y^2 = 6 - 3r^2}$$

Traza xy

$$3x^2 + 3y^2 = 6$$
$$x^2 + y^2 = 2$$



Por lo tanto, la integral que calcula el volumen del sólido en coordenadas polares es:

R/

$$\boldsymbol{V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3r^2) r dr d\theta = 6\pi}$$