Clave-114-2-V-1-00-2015

Universidad de San Carlos De Guatemala

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ciencias

Departamento de Matemática

Curso: Matemática Intermedia 3

Jornada: Vespertina

Examen: Segundo Parcial

Fecha: Marzo de 2015

Semestre: 1er Semestre

Solución hecha por: Gabriel Cabrera

Tema 1

En una ciudad de 200,000 habitantes una epidemia comenzó a propagarse. Despues de una semana 10,000 personas se habian infectado. Suponga que la razon aumento del número de personas infectadas es proporcional al de las que aún no han sido infectadas. ¿Cuánto tiempo pasara para que la mitad de la población este infectada?. (Suponga que al inicio habia una persona infectada).

Tema 2

Un tanque de 150 galones se llena inicialmente con alcohol. Al tanque fluye agua pura a razon de 15 galones/minuto. La mezcla sale del tanque a la misma tasa y pasa a otro tanque de 150 galones que se habia llenado con agua pura. La mezcla resultante sale del segundo tanque a razón de 15 galones/minuto.

a) Encuentre la cantidad de alcohol en el primer tanque en cualquier instante.
b) Encuentre la cantidad de alcohol en el segundo tanque en cualquier instante.
c) Determine la maxima cantidad de alcohol que llega a tener el segundo tanque y en cuanto tiempo se da.

Tema 3

Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20°C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo.

a) ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumentó 2° C en 1 segundo?
b) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98° C?

Tema 4

Un tanque con forma de cono recto con el vértice hacia abajo, está sacando agua por un agujero circuilar en el fondo. Suponga que el tanque tiene 15 pies de altura y tiene un radio de 6 pies y el agujero circuilar mide una pulgada de radio. Si al principio el tanque está lleno. ¿Cuánto tardará en vaciarse el tanque?

Tema 5

El isótopo radiactivo del plomo Pb-209 decae con una razón proporcional a la cantidad presente al tiempo t y tiene una vida media de 3.3 horas. Si al principio habia 1 gramo de plomo, ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que decaiga 90%?

TEMA 1

$$\frac{dP}{dt} = k(200000 - P)$$

$$\int \frac{dP}{200000 - P} = \int kdt$$

Integrando se obtiene

$$Ln(P - 200000) = kt + c$$

$$P = 200000 + ce^{-kt}$$

Usando las condiciones iniciales

$$P(0) = 1 = 200000 + c \rightarrow c = 199999$$

$$P = 200000 - 199999e^{kt}$$

$$10000 = 200000 - 199999e^{-k} \rightarrow k = 0.05129$$

$$P = 200000 - 199999e^{-0.05129t}$$

$$100000 = 200000 - 199999e^{-0.05129t} \rightarrow t = 13.51$$

El tiempo en infectar a la mitad de la población es

$$\boxed{t = 13.51 semanas}$$

TEMA 2

$$\frac{dA}{dt} = 15(0) - \frac{15A}{150} \rightarrow \frac{dA}{dt} = -\frac{A}{10}$$

$$\int \frac{dA}{dt} = \int -\frac{dt}{10} \rightarrow Ln(A) = -\frac{t}{10} + c$$

$$A(t) = ce^{-t/10}$$

$$A(0) = 150 = c$$

$$\boxed{A(t)=150e^{-t/10}}$$

$$\frac{dB}{dt}=(15)\frac{150e^{-t/10}}{150}-\frac{15B}{150}\rightarrow\frac{dB}{dt}+\frac{B}{10}=15e^{-t/10}$$

Resolviendo por ecuación lineal

$$Factor\quad de\quad Integracion\quad =e^{t/10}$$

$$Be^{-t/10}=15\int e^{-t/10}e^{t/10}dt$$

$$B(t)=15te^{-t/10}+ce^{-t/10}$$

$$B(0)=0=c$$

$$\boxed{B(t)=15te^{-t/10}}$$

$$B'(t)=-\frac{15te^{-t/10}}{10}+15e^{-t/10}=-15e^{-t/10}\left(\frac{t}{10}-1\right)$$

Igualando a cero para encontrar el máximo

$$-15e^{-t/10}\left(\frac{t}{10}-1\right)=0\rightarrow t=10$$

$$B(10)=15te^{-10/10}=55.18$$

$$\boxed{B(10)=55.18}$$

TEMA 3

$$T=Tm-ce^{kt}$$

$$T=100-ce^{kt}$$

Usando las condiciones iniciales

$$T(0)=20=100-c\rightarrow c=80$$

$$T(1)=22=100-80e^{k}\rightarrow k=-0.02532$$

$$T(t) = 100 - 80e^{-0.02532t}$$

$$98 = 100 - 80e^{-0.02532t} \rightarrow t = 145.69$$

$$\boxed{t = 145.69 seg}$$

$$90 = 100 - 80e^{-0.02532t} \rightarrow t = 82.13$$

$$\boxed{t = 82.13 seg}$$

TEMA 4

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

$$k = \pi\left(\tfrac{1}{12}\right)^2\sqrt{64} = \frac{8}{144}\pi$$

$$y = \frac{15}{6}x \rightarrow x = \frac{6}{15}y$$

$$A(y) = \left(\frac{6}{15}\right)^2 \pi y^2$$

$$\left(\frac{6}{15}\right)^2 \pi y^2 \frac{dy}{dt} = -\frac{8\pi}{144}\sqrt{y}$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$\int \left(\frac{\left(\tfrac{6}{15}\right)^2 y^2}{\sqrt{y}}\right) dy = \int -\frac{8}{144} dt$$

$$\frac{8}{125} y^{5/2} = -\frac{8}{144}t + c$$

Usando la condición inicial y(0)=15

$$\frac{8}{125}(15)^{5/2} = -\frac{8}{144}(0) + c \rightarrow c = 55.77$$

$$0 = -\frac{8}{144}t + 55.77 \rightarrow t = 1003.86$$

$$\boxed{t = 1003.86 seg}$$

Tema 5

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

Integrando se obtiene

$$Ln(P) = kt + c$$

$$P = ce^{-kt}$$

Usando las condiciones iniciales

$$P(0) = 1 = c$$

$$P = e^{kt}$$

$$0.5 = e^{3.3k} \rightarrow -0.21$$

$$P(t) = e^{-0.21t}$$

$$0.1 = e^{-0.21t} \rightarrow t = 10.96$$

$$\boxed{t = 10.96 seg}$$