Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

clave-118-2-V-1-00-2015

Curso:	Matemática Aplicada 1
Código del Curso:	118
Semestre:	Primer Semestre 2015
Tipo de Examen:	Segundo Examen Parcial
Nombre de la persona que resolvió el examen:	Oscar Rolando Ramírez Milián
Revisado por:	Ing. Benjamín Piedrasanta

21 de abril de 2015

1. Enunciados

1.1. Tema 1

Use la transformada de Laplace para resolver la ecuación integrodiferencial.

$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = 4e^{-t} + \sin(t) \tag{1}$$

1.2. Tema 2

Determine la solución del sistema, aplicando la transformada de Laplace.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = e^{2t} \tag{2}$$

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = -e^{2t} \tag{3}$$

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0} = 0 \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} \tag{4}$$

1.3. Tema 3

Determine la transformada de Laplace para la siguiente función periódica.

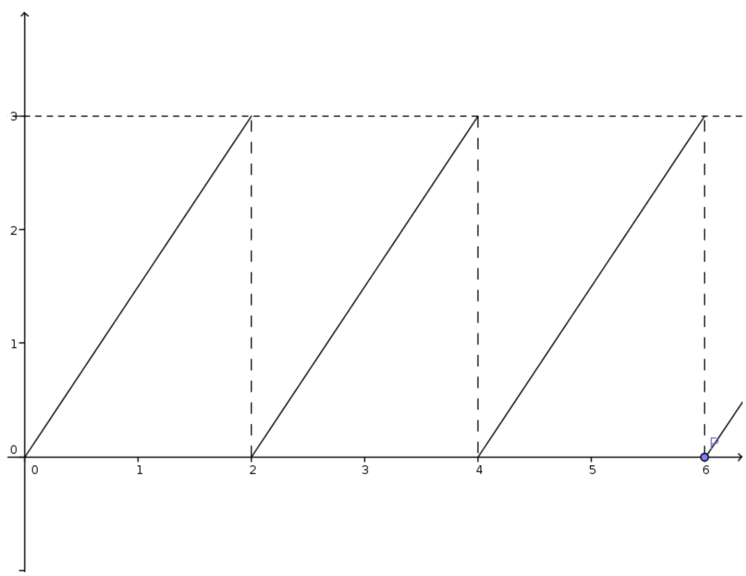

Figura 1: Función periódica

1.4. Tema 4

- Aplique la derivada para calcular la transformada:

$$\mathcal{L}\left\{te^{3t}\cos(4t)\right\} \tag{5}$$

- Resuelva la transformada
  - $$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau\right\} \tag{6}$$
  - $$\mathcal{L}\left\{e^{-t} * e^{t}\sin(t)\right\} \tag{7}$$

2. Solucionario

2.1. Tema 1

Para resolver esta ecuación aplicamos transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación.

$$\mathcal{L}\left\{f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{4e^{-t} + \sin(t)\right\} \tag{8}$$

Como resultado tenemos

$$F(s) + \frac{2sF(s)}{s^2+1} = \frac{4}{1+s} + \frac{1}{1+s^2} \tag{9}$$

Al despejar $F(s)$ tenemos:

$$F(s) = \frac{4s^2+s+5}{(s+1)^3} \tag{10}$$

Para obtener las funciones inversas necesarias, es mejor expresar esta función en su representación por fracciones parciales

$$F(s) = \frac{8}{(s+1)^3} - \frac{7}{(1+s)^2} + \frac{4}{1+s} \tag{11}$$

Obtenemos la inversa de $F(s)$ para obtener $f(t)$.

$$f(t) = \left(4t^2 - 7t + 4\right)e^{-t}\mathrm{u}(t) \tag{12}$$

2.2. Tema 2

De manera similar al problema anterior, aplicamos la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones y aplicamos las condiciones iniciales.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\} \tag{13}$$

$$\mathcal{L}\left\{2\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right\}=\mathcal{L}\left\{-e^{2t}\right\} \tag{14}$$

De las ecuaciones anteriores y las propiedades de la transformada de Laplace tenemos la siguiente expresión

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=\frac{1}{s-2} \tag{15}$$

$$2sX(s)-x(0)+s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=-\frac{1}{s-2} \tag{16}$$

De las condiciones iniciales tenemos

$$s^2X(s)+s^2Y(s)=\frac{1}{s-2} \tag{17}$$

$$2sX(s)+s^2Y(s)=-\frac{1}{s-2} \tag{18}$$

Podemos resolver este sistema para $X(s)$ y $Y(s)$ en términos de s y obtenemos

$$X(s)=\frac{2}{s(s-2)^2} \tag{19}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s-2)}-\frac{2}{(s-2)^2s} \tag{20}$$

Para encontrar las transformaciones inversas de estas funciones es mejor escribirlas en su representación de fracciones parciales

$$X(s)=\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{2(s-2)}+\frac{1}{2s} \tag{21}$$

$$Y(s)=\frac{-1}{(s-2)^2}+\frac{3}{4(s-2)}-\frac{1}{2s^2}-\frac{3}{4s}. \tag{22}$$

Luego encontramos las transformaciones inversas de las funciones $X(s)$ y $Y(s)$,

$$x(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{2t}}{2}+e^{2t}t\right)\mathrm{u}(t) \tag{23}$$

$$y(t)=\left(\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{t}{2}-2e^{2t}t\right)\mathrm{u}(t). \tag{24}$$

2.3. Tema 3

En la figura 1 tenemos una $G(x)$ que cumple con ser periódica. Podemos expresar $G(x)$ como una función definida a tramos. $G(x)$ es de período dos, entonces el tramo de función definida en el intervalo $[0, 2)$ es exactamente el mismo tramo definido en el intervalo $[2, 4)$. Sea $f(x)$ otra función definida como $G(x)$ en el intervalo $[0, 2)$, y cero para los demás valores. Por tanto podemos escribir $G(x)$ de la siguiente manera:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x-2k)\mathrm{u}(t-2k). \tag{25}$$

De la figura 1 definimos $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{if } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{if } \forall x \notin [0,2)\,. \end{cases} \tag{26}$$

De la definición de la transformada de Laplace, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(x)\} = \quad & \textstyle\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx & (27)\\ & \textstyle\int_0^2 \frac{3}{2}xe^{-sx}dx & (28)\\ & \tfrac{3}{2s^2}\left(1-e^{-2s}(1+2s)\right) & (29)\\ & \tfrac{3}{2s^2}\left(1-e^{-2s}-2se^{-2s}\right) & (30) \end{aligned}$$

Para obtener la transformada de Laplace de $G(x)$, se la aplicamos a la ecuación 25.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(x)\} = \quad & \mathcal{L}\{\textstyle\sum_{k=0}^\infty f(x-2k)\mathrm{u}(t-2k)\} & (31)\\ & \textstyle\sum_{k=0}^\infty \mathcal{L}\{f(x-2k)\mathrm{u}(t-2k)\} & (32)\\ & \textstyle\sum_{k=0}^\infty \mathcal{L}\{f(x)\}e^{-2ks} & (33)\\ & \mathcal{L}\{f(x)\}\textstyle\sum_{k=0}^\infty e^{-2ks} & (34)\\ & \tfrac{3}{2s^2}\left(1-e^{-2s}-2se^{-2s}\right)\textstyle\sum_{k=0}^\infty e^{-2ks} & (35) \end{aligned}$$

La ecuación 35 nos da la transformada de Laplace para $G(x)$ pero podemos asegurar la convergencia, solamente si $s > 0$, en el caso de estar definida solamente en los reales. Por tanto

$$\mathcal{L}\{G(x)\} = \frac{3}{2s^2}\left(1-e^{-2s}-2se^{-2s}\right)\frac{1}{1-e^{-2s}} \qquad \forall s > 0. \tag{36}$$

2.4. Tema 4

- La siguiente ecuación enuncia una de las propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}. \tag{37}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{te^{3t}\cos(4t)\right\} = \quad & -\tfrac{d\mathcal{L}\left\{e^{3t}\cos(4t)\right\}}{ds} & (38)\\ & -\tfrac{d(\frac{s-3}{(s-3)^2+16})}{ds} & (39)\\ & \tfrac{2(s-3)^2}{16+(s-3)^2} - \tfrac{1}{(s-3)^2+16} & (40) \end{aligned}$$

- Para resolver ambos incisos aplicamos la siguiente propiedad de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(s)G(s) \tag{41}$$

Aplicando la ecuación 41 a los incisos del presente tema,

  - $$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\sin(t) * \cos(t)\right\} \tag{42}$$
    $$\mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}\mathcal{L}\left\{\cos(t)\right\} \tag{43}$$
    $$\left(\tfrac{1}{s^2+1}\right)\left(\tfrac{s}{s^2+1}\right) = \tfrac{s}{(s^2+1)^2} \tag{44}$$

  - $$\mathcal{L}\left\{e^{-t} * e^{t}\sin(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\}\mathcal{L}\left\{e^{t}\sin(t)\right\} = \frac{1}{s+1}\frac{1}{(s-1)^2+1} \tag{45}$$