UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE 122-2-M-1-00-2015_SA

CURSO:	**Matemática Aplicada 4**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**122**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**8 de abril del 2015**
PERSONA QUE ELABORÓ LA CLAVE:	**German Oliva**
PERSONA QUE REVISÓ LA CLAVE:	**Ing. Carlos Garrido**

Universidad de San Carlos
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Jornada Matutina
Matemática Aplicada 4
Sección A

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

TEMA 1

Calcule la integral de $\int_0^2 x^2 \sin x \, dx$

a) Por medio de la integración de Romberg con $R_{3,3}$ (Deje constancia de $R_{1,1}$ a mano).
b) Utilizando cuadratura gaussiana con n = 4.

TEMA 2

Aplique el método de Taylor de orden cuatro para aproximar la solución del siguiente problema de valor inicial

$$y' = 2 + 2\,t^2 + 4y \quad , \quad 0 \le t \le 1, \qquad y(0) = 1, \quad h = 0.2$$

TEMA 3

Aplique el método de Adams – Bashforth de tres pasos para aproximar la solución del siguiente problema de valor inicial. Utilice valores iniciales exactos.

$$y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2 \quad , con\ h = 0.1, solución\ real\ y(t) = t \ln t + 2t$$

Deje constancia de dos aproximaciones completas a mano.

SOLUCIÓN DE EXAMEN

TEMA 1.a

Para aproximar una integral por el método de Romberg primero usamos los resultados de la regla compuesta del trapecio, denotándolo $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{3,1}$, … Después, de forma general, luego de aproximar los valores $R_{k,\, j-1}$, se determinan las aproximaciones $O(h^{2j})$ por medio de la relación:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1}\left[R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}\right]$$

La regla compuesta del trapecio para los varios valores de n dan como resultado las siguientes aproximaciones.

$$R_{1,1} = \frac{2}{2}[f(0) + f(2)] = 3.637190$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}[f(0) + 2f(1) + f(2)] = 2.6600651$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{4}[f(0) + 2 * (f(0.5) + f(1.0) + f(1.5)) \; + f(2)] = 2.512143$$

Las aproximaciones de $O(h^4)$ son:

$$R_{2,2} = R_{2,1+}\frac{1}{3}\left[R_{2,1} - R_{1,1}\right] = 2.334338$$

$$R_{3,2} = R_{3,1+}\frac{1}{3}\left[R_{3,1} - R_{2,1}\right] = 2.462835$$

Las aproximación de $O(h^6)$ es:

$$R_{3,3} = R_{3,2+}\frac{1}{15}\left[R_{3,2} - R_{2,2}\right] = 2.471401$$

TEMA 1.b

$$\int_0^2 x^2 \sin x \, dx$$

Debido a que los intervalos definidos son arbitrarios, necesitamos convertirlos a intervalos válidos para el método de Cuadratura Gaussiana (-1, 1). Esto se logra por medio de la siguiente relación.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\frac{(b-a)t + b + a}{2})\frac{b-a}{2}dt$$

Aplicando esta relación al problema dado obtenemos luego de un proceso de cálculo la integral a continuación.

$$\int_0^2 x^2 \sin x \, dx = \int_{-1}^1 f(\frac{2t+2}{2})\frac{2}{2}dt = \int_{-1}^1 f(t+1)\, dt = \int_{-1}^1 (t+1)^2 \sin(t+1)dt$$

Para n = 4 el método de Cuadratura Gaussiana define los coeficientes (C_n) y las raíces (R_n)

R_n	C_n
0.861136311	0.347854845
0.339981043	0.652145154
-0.339981043	0.652145154
-0.861136311	0.347854845

Según la definición del método, la aproximación de la integral con n= 4 es la presentada a continuación

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = C_0 f(R_0) + C_1 f(R_1) + C_2 f(R_2) + C_3 f(R_3)$$

Con esta definición evaluamos y obtenemos la aproximación dada por el método.

$$\int_0^2 x^2 \sin x \, dx \approx 0.347854845 * f(0.861136311) + 0.652145154 * f(0.339981043) + 0.652145154 * f(-0.339981043) + 0.347854845 * f(-0.861136311)$$

$$\int_0^2 x^2 \sin x \, dx \approx 2.469498597$$

TEMA 2

Para aplicar a este problema el método de Taylor y como primer paso se deben encontrar las derivadas necesarias, que corresponden a n-1.

$$f(t,y) = 2 + 2\,t^2 + 4y$$

$$f'(t,y) = 4t + 4y' = \ 4t + 4(2 + 2\,t^2 + 4y\,) = 4t + 8 + 8\,t^2 + 16y$$

$$f'(t,y) = 8\,t^2 + 4t + 8 + 16y$$

$$f''(t,y) = 16t + 4 + 16y' = \ 16t + 4 + 16(2 + 2\,t^2 + 4y) = 16t + 4 + 32 + 32\,t^2 + 64y$$

$$f''(t,y) = 32\,t^2 + 16t + 36 + 64y$$

$$f'''(t,y) = 64t + 16 + 64y' = \ 64t + 16 + 64(2 + 2\,t^2 + 4y\,)$$
$$= 64t + 16 + 128 + 128\,t^2 + 256y$$

$$f'''(t,y) = 128\,t^2 + 64t + 144 + 256y$$

Luego obtenemos la función T de orden cuatro, la cual es necesaria para realizar cada iteración. Para este caso T se define:

$$T^{(4)}(t_{i,}w_i) = \ f(t_{i,}w_i) + \frac{h}{2}f'(t_{i,}w_i) + \frac{h^2}{6}f''(t_{i,}w_i) + \frac{h^3}{24}f'''(t_{i,}w_i)$$

$$T^{(4)}(t_{i,}w_i) = \ (2 + 2\,t^2{}_i + 4w_i) + \ \frac{1}{10}(8\,t_i{}^2 + 4t_i + 8 + 16w_i)$$
$$+ \frac{1}{150}(32\,t_i{}^2 + 16t_i + 36 + 64w_i) + \frac{1}{3000}(128\,t_i{}^2 + 64t_i + 144 + 256w_i)$$

$$T^{(4)}(t_{i,}w_i) = \ \frac{382}{125}\ t_i{}^2 + \frac{66}{125}t_i + \frac{386}{125} + \frac{764}{125}w_i$$

$$T^{(4)}(t_{i,}w_i) = \ \frac{1}{125}\ (382\,t_i{}^2 + 66\,t_i + 386 + 764\,w_i)$$

Luego empezamos a trabajar con w0, el cual nos lo dan como valor de entrada (y(0)).

$$w_{i+1} = w_i + h\,T(t_i,w_i)$$

I	**t_i**	**w_i**	**$T(t_i,w_i)$**	**W_{i+1}**
0	0	1	9.20000000	2.84
1	0.2	2.920000	20.67392000	6.974784
2	0.4	7.334464	46.41803981	16.25839196
3	0.6	17.471285	103.8762517	37.0336423
4	0.8	40.669402	231.8158617	83.39681464
5	1.0	93.614625	516.393331	186.6754809
6	1.2	214.243812	1149.082779	416.4920366
7	1.4	488.810203	2555.416288	927.5752942
8	1.6	1113.419165	5681.096358	2063.794566
9	1.8	5764.079327	12627.85223	4589.365011

TEMA 3

La ecuación utilizada para trabajar el método de Adams-Bashfort de tres pasos se presenta a continuación, junto con la sustitución de valores para el siguiente problema.

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{120}[23(1 + \frac{w_i}{t_i}) - 16(1 + \frac{w_{i-1}}{t_{i-1}}) + 5(1 + \frac{w_{i-2}}{t_{i-2}})]$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{120}[12 + 23\frac{w_i}{t_i} - 16\frac{w_{i-1}}{t_{i-1}} + 5\frac{w_{i-2}}{t_{i-2}}]$$

W_0 corresponde al valor inicial del problema, w_1 y w_2 se obtiene a través del método Runge-Kutta, sin embargo, con el objetivo de reducir el tiempo para desarrollar este problema se utiliza la función solución para obtener los primeros valores. Las siguientes dos iteraciones a mano se presentan a continuación:

$$w_3 = (2.618786) + \frac{1}{120}\left[12 + 23\frac{(2.618786)}{1.2} - 16\frac{(2.304841)}{1.1} + 5\frac{(2)}{1.0}\right] = 2.941023$$

$$w_4 = 2.941023 + \frac{1}{120}\left[12 + 23\frac{(2.941023)}{1.3} - 16\frac{(2.618786)}{1.2} + 5\frac{(2.304841)}{1.1}\right] = 3.270964$$

I	**t_i**	**W_i**
0	1	2
1	1.1	2.304841
2	1.2	2.618786
3	1.3	2.941023
4	1.4	3.270964
5	1.5	3.608061
6	1.6	3.951834
7	1.7	4.304865
8	1.8	4.657783
9	1.9	5.019262
10	2.0	5.386008