Clave-962-1-M-1-00-2015_sA

Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matematíca

Clave Primer Parcial

Persona que realiza la clave:	Jorge Mario Gutiérrez Ovando
Revisada por:	Ing. Alfredo Gonzalez
Curso:	Matemática para Computación 2
Semestre:	Primer Semestre
Año:	2015
Fecha del Examen:	18 de Febrero 2015

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Matemática para Computación 2
Primer Parcial
18/02/2015

Temario A

TEMA 1 (15 Pts.)

Resuelva $a_{n+1} - 2a_n = 2^n + 3, n \geq 0, a_0 = 1;$

TEMA 2 (20 Pts.)

Resuelva la relación de recurrencia $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n$.

TEMA 3 (20 Pts.)

En el primer día de un nuevo año, José deposita Q1,000.00 en una cuenta que paga un interés compuesto mensual del 6%. Al principio de cada mes, él agrega Q200.00 a esa cuenta. Si continúa haciendo esto durante los cuatro años siguientes (de modo que realice 47 depósitos más de Q200.00), ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta después de esos cuatro años?

TEMA 4 (30 Pts.)
Para $n \geq 0$ sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suman n. Por ejemplo, $a_3 = 3,$ pues
1+1+1;
1+2
2+1

TEMA 5 (15 Pts.)

Encuentre una relación de recurrencia cuya solución pueda ser

$$a_n = C_1(2^{-n}) + 3^n(C_2 \cos\frac{\pi}{3}n + C_3 \sin\frac{\pi}{3}n) + C_4(-1)^n$$

Solución de Examen

Tema I (15 pts)
Resuelva $a_{n+1} - 2a_n = 2^n + 3,\ n \geq 0\ ,\ a_0 = 1$

La solución general de la ecuación está formada por la suma de la solución homogénea más la solución particular.

$a_n = a_n{}^{(h)} + a_n{}^{(p)}$

Solución Homogénea
$a_{n+1} - 2a_n = 0$ // 1

La solución propuesta es:
$a_n = Cr^n$ // 2

Al evaluar 2 en 1 tenemos
$Cr^{n+1} - 2Cr^n = 0$ //3

Se cancela el termino Cr^n al multiplicar 3 por $\frac{1}{Cr^n}$

$$\frac{Cr^{n+1}}{Cr^n} - \frac{2Cr^n}{Cr^n} = 0$$

$r - 2 = 0$
$r = 2$

$a_n{}^{(h)} = C_1 r^n \quad \rightarrow \quad a_n{}^{(h)} = C_1 2^n$

Solución Particular
La solución particular se propone en base a la expresión que hace no homogénea la relación de recurrencia.
$a_n{}^{(p)} = A2^n + B$

Las soluciones deben ser linealmente independientes, en este caso la solución $C_1 2^n$ es linealmente dependiente con $A2^n$ para eliminarla multiplicamos el primer término de la solución particular con una "n". (No se multiplican ambos términos porque el termino B ya es linealmente independiente).

$a_n{}^{(p)} = An2^n + B$

Se sustituye la $a_n{}^{(p)}$ en la relación de recurrencia.
$a_{n+1}{}^{(p)} - 2a_n{}^{(p)} = 2^n + 3$
$A(n+1)2^{n+1} + B - 2An2^n - 2B = 2^n + 3$
$2nA2^n + 2A2^n + B - 2An2^n - 2B = 2^n + 3$
$2A2^n - B = 2^n + 3$

De esto resultan dos ecuaciones que son:

$$B = -3 \qquad 2A2^n = 2^n$$
$$B = -3 \qquad A = \frac{1}{2}$$

Por lo que la solución particular es:

$$a_n{}^{(p)} = An2^n + B \qquad \rightarrow \qquad a_n{}^{(p)} = \frac{1}{2}n2^n - 3$$

Sumando las soluciones homogénea y particular nos da la solución general.

$$a_n = a_n{}^{(h)} + a_n{}^{(p)}$$
$$a_n = C_1 2^n + \frac{1}{2}n2^n - 3$$

<u>Condiciones Iniciales</u>
Para determinar el valor de la constante C_1 se aplica la condición inicia $a_0 = 1$.

$$a_0 = C_1 2^{(0)} + \frac{1}{2}(0)2^{(0)} - 3 \qquad \rightarrow \qquad 1 = C_1 - 3 \qquad \rightarrow \qquad 4 = C_1$$

Quedando la solución como:

$$\boxed{a_n = 4 * 2^n + \frac{1}{2}n2^n - 3}$$

Tema II (20 pts)
Resuelva la relación de recurrencia $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 5n + 3,\ n \geq 0$

La solución general de la ecuación está formada por la suma de la solución homogénea más la solución particular.

$$a_n = a_n{}^{(h)} + a_n{}^{(p)}$$

Solución Homogénea
$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$ //1

La solución propuesta es:
$a_n = Cr^n$ // 2

Al evaluar 2 en 1 tenemos
$Cr^{n+3} - 3Cr^{n+2} + 3Cr^{n+1} - Cr^n = 0$ //3

Se cancela el termino Cr^n al multiplicar 3 por $\frac{1}{Cr^n}$
$$\frac{Cr^{n+3}}{Cr^n} - 3\frac{Cr^{n+2}}{Cr^n} + 3\frac{Cr^{n+1}}{Cr^n} - \frac{Cr^n}{Cr^n} = 0$$

$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$
$(r-1)(r-1)(r-1) = 0$
$r = 1$ Con multiplicidad 3

$a_n{}^{(h)} = C_1 r^n + C_2 r^n + C_3 r^n \quad \rightarrow \quad a_n{}^{(h)} = C_1 3^n + C_2 3^n + C_3 3^n$

Como son linealmente dependientes se multiplican por "n" y "n^2" dos de las soluciones.

$a_n{}^{(h)} = C_1 1^n + C_2 n 1^n + C_3 n^2 1^n$
$a_n{}^{(h)} = C_1 + C_2 n + C_3 n^2$

Solución Particular
La solución particular se propone en base a la expresión que hace no homogénea la relación de recurrencia.
$a_n{}^{(p)} = An + B$

Las soluciones deben ser linealmente independientes, en este caso la solución C_1 es linealmente dependiente con B y la solución $C_2 n$ es linealmente dependiente con An, para eliminarlas multiplicamos el primer término y el segundo término de la solución particular con una "n^3". (Se multiplican ambas ya que eran linealmente dependientes).

$a_n{}^{(p)} = An^4 + Bn^3$

Se sustituye la solución particular en la relación de recurrencia.

$*\ a_{n+3}{}^{(p)} - 3a_{n+2}{}^{(p)} + 3a_{n+1}{}^{(p)} - a_n{}^{(p)} = 5n + 3$

$*\ A(n+3)^4 + B(n+3)^3 - 3A(n+2)^4 - 3B(n+2)^3 + 3A(n+1)^4 + 3B(n+1)^3 - An^4 - Bn^3 = 5n + 3$

$*\ A(n^4 + 12n^3 + 54n^2 + 108n + 81) + B(n^3 + 9n^2 + 27n + 27) - 3A(n^4 + 8n^3$
$24n^2 + 32n + 16) - 3B(n^3 + 96 + 12n + 8) + 3A(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) +$
$3B(n^3 + 96 + 12n + 8) - An^4 - Bn^3 = 5n + 3$

$*\ n^4(A - 3A + 3A - A) + n^3(12A + B - 24A - 3B + 12A + 3B - B) + n^2(54A + 9B$-
$72A - 18B + 18A + 9B) + n(108A + 27B - 96A - 36B + 12A + 9B) + 81A +$
$27B - 48A - 24B + 3A + B = 5n + 3$

$*\ n^4(0) + n^3(0) + n^2(0) + n(24A) + 36A + 6B = 5n + 3$

De la expresión anterior se sacan dos ecuaciones que son:

$24An = 5n \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{5}{24}$

$36A + 6B = 3 \qquad \rightarrow \qquad 36 * \frac{5}{24} + 6B = 3 \qquad \rightarrow \qquad B = -\frac{3}{4}$

Por lo que la solución particular es:

$a_n{}^{(p)} = An^4 + Bn^3 \qquad \rightarrow \qquad a_n{}^{(p)} = \frac{5}{24}n^4 - \frac{3}{4}n^3$

Sumando las soluciones homogénea y particular nos da la solución general.

$a_n = a_n{}^{(h)} + a_n{}^{(p)}$

$$\boxed{a_n = C_1 3^n + C_2 3^n + C_3 3^n + \frac{5}{24}n^4 - \frac{3}{4}n^3}$$

Nota: En este caso como no nos dieron condiciones iniciales no se podrá encontrar las constantes C_1, C_2, C_3.

Tema III (20 pts)

En el primer día de un nuevo año, José deposita Q1,000.00 en una cuenta que paga un interés compuesto mensual del 6%. Al principio de cada mes el agrega Q200.00 a esa cuenta. Si continúa haciendo esto durante los cuatro años siguientes (de modo que realiza 47 depósitos de Q200.00) ¿Cuánto dinero tendrá después de 4 años?

$n = \#\ de\ meses\ transcurridos\ despues\ de\ crear\ la\ cuenta$
$a_n = Cantidad\ de\ dinero\ despues\ de\ n\ meses$

n	a_n		
0	1000	$\rightarrow$	a_0
1	$1000 + 0.06(1000) + 200$	$\rightarrow$	$1.06a_0 + 200$
2	$1260 + 0.06(1260) + 200$	$\rightarrow$	$1.06a_1 + 200$
3	$1535.6 + 0.06(1535.6) + 200$	$\rightarrow$	$1.06a_2 + 200$
.	.		.
n	$a_{n-1} + 0.06a_{n-1} + 200$	$\rightarrow$	$1.06a_{n-1} + 200$

Por lo que la relación de recurrencia que modela el problema queda de la siguiente forma:

$a_{n+1} = 1.06a_n + 200$
$a_{n+1} - 1.06a_n = 200$

La solución general de la ecuación está formada por la suma de la solución homogénea más la solución particular.

$a_n = a_n{}^{(h)} + a_n{}^{(p)}$

<u>Solución Homogénea</u>
$a_{n+1} - 1.06a_n = 0$ //1

La solución propuesta es:
$a_n = Cr^n$ // 2

Al evaluar 2 en 1 tenemos
$Cr^{n+1} - 1.06Cr^n = 0$ //3

Se cancela el termino Cr^n al multiplicar 3 por $\frac{1}{Cr^n}$
$\frac{Cr^{n+1}}{Cr^n} - 1.06\frac{Cr^n}{Cr^n} = 0$

$r - 1.06 = 0$
$r = 1.06$

$a_n{}^{(h)} = C_1 r^n \qquad \rightarrow \qquad a_n{}^{(h)} = C_1(1.06)^n$

Solución Particular

La solución particular se propone en base a la expresión que hace no homogénea la relación de recurrencia.

$a_n{}^{(p)} = A$

Se sustituye la solución particular en la relación de recurrencia.

$a_{n+1}{}^{(p)} - 1.06a_n{}^{(p)} = 200$
$A - 1.06A = 200$
$A = -3333.33$

Sumando ambas soluciones se obtiene la solución general.

$a_n = a_n{}^{(h)} + a_n{}^{(p)}$
$a_n = C_1(1.06)^n - 3333.33$

Condiciones Iniciales

Para determinar el valor de la constante C_1 se aplica la condición inicia $a_0 = 1000$

$a_0 = 1000$
$a_0 = C_1(1.06)^{(0)} - 3333.33$
$1000 = C1 - 3333.33$
$4333.33 = C_1$

Quedando la solución de la relación de recurrencia como:

$a_n = 4333.33(1.06)^{(0)} - 3333.33$

A los cuatro primeros años (después de 48 meses de haber realizado el primer deposito).

$a_{48} = 4333.33(1.06)^{(47)} - 3333.33$
$\boxed{a_{48} = Q.67{,}706.726}$

Tema IV
Para n≥0 sea a_n el número de formas en que una sucesión compuesta por 1 y 2 suman n, encuentre a_n. Por ejemplo:

a_3= 3 ya que hay tres formas de sumar 3 con unos y ceros, que son 1+1+1, 2+1, 1+2.

n	Formas	a_n
0		1
1	1	1
2	1+1,2	1+1=2
3	1+1+1,2+1,1+2	2+1=3
4	1+1+1+1,2+1+1,1+2+1,1+1+2,2+2	3+2=5
5	1+1+1+1+1,2+1+1+1,1+2+1+1,1+1+2+1,1+1+1+2, 2+2+1,2+1+2,1+2+2	5+3=8
6	1+1+1+1+1+1,2+1+1+1+1,1+2+1+1+1,1+1+2+1+1, 1+1+1+2+1,1+1+1+1+2,2+2+1+1,2+1+2+1,2+1+1+2, 1+2+1+2,1+1+2+2,1+2+2+1,2+2+2	8+5=13
n		$a_{n-1}+a_{n-2}=a_n$

Corriendo los índices tenemos la siguiente relación de recurrencia.

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$
$$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$$

En este caso como el extremo derecho de la ecuación es igual a cero, no existe la solución particular.

<u>Solución Homogénea</u>
$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ //1

La solución propuesta es:
$a_n=Cr^n$ // 2

Al evaluar 2 en 1 tenemos
$Cr^{n+2}-Cr^{n+1}-Cr^n=0$ //3

Se cancela el termino Cr^n al multiplicar 3 por $\frac{1}{Cr^n}$
$$\frac{Cr^{n+2}}{Cr^n}-\frac{Cr^{n+1}}{Cr^n}-\frac{Cr^n}{Cr^n}=0$$

$$r^2-r-1=0$$
$$r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

La solución a la relación de recurrencia queda de la siguiente forma:

$$a_n = C_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

<u>Condiciones Iniciales</u>
Para determinar el valor de la constante C_1 y C_2 se aplica la condición inicia $a_0 = 1$

$a_0 = 1$
$1 = C_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^0$
$1 = C_1 + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = 1 - C_1$ //ecuación 1

$a_1 = 1$
$1 = C_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^1$ //ecuación 2

Sustituyendo ecuación 1 en 2
$1 = C_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + (1 - C_1)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
$1 = -C_1\sqrt{5} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$
$C_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$

Utilizando la ecuación 1 se obtiene el valor de C_2
$C_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

Quedando la solución de la relación de recurrencia como:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Tema V
Encuentre una relación de recurrencia cuya solución pueda ser
$a_n = C_1(2^{-n}) + 3^n\left(\mathrm{C}_2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \mathrm{C}_3\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right) + C_4(-1)^n$

Como todos los términos tienen constantes se asume que no tiene solución particular.

<u>Extrayendo las raíces</u>
Las soluciones de la relación de recurrencia surgen de la expresión Cr^n, las raíces de la solución proporcionada son:
$r_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad r_2 = -1$ $\qquad r_3 = \alpha + \beta j$ $\qquad r_4 = \alpha - \beta j$

La solución propuesta para una raíz imaginaria es $k^n(\mathrm{C}_2\cos(\theta n) + \mathrm{C}_3\sin(\theta n))$, donde las constantes k y θ están dadas por:

$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	$\theta = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$
$k = 3$	$\theta = \frac{\pi}{3}$
$3 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	$\frac{\pi}{3} = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$
$9 = \alpha^2 + \beta^2$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\beta}{\alpha}$
$9 = \alpha^2 + \beta^2$	$\sqrt{3} = \frac{\beta}{\alpha}$
$9 = \alpha^2 + \beta^2$	$\sqrt{3}\alpha = \beta$

Sustituyendo la ecuación de la derecha en la de la izquierda.
$9 = \propto^2 + (\alpha\sqrt{3})^2$
$9 = \propto^2 + \alpha^2 3$
$9 = 4 \propto^2$
$\frac{9}{4} = \propto^2$
$\frac{3}{2} = \alpha$

Utilizando la ecuación $\sqrt{3}\alpha = \beta$ se encuentra a β
$\sqrt{3}(\frac{3}{2}) = \beta$
$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \beta$

Formando la relación de recurrencia

$$(r-r_1)*(r-r_2)*(r-r_3)*(r-r_4)=0$$
$$\left(r-\frac{1}{2}\right)*(r+1)*\left(r-\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}j\right)\right)*\left(r-\left(\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}j\right)\right)=0$$
$$\left(r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\right)*\left(r-\frac{3}{2}r+\frac{3\sqrt{3}}{2}jr-\frac{3}{2}r-\frac{3\sqrt{3}}{2}jr+\left(\frac{9}{4}-\frac{27}{4}j^2\right)\right)=0$$
$$\left(r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\right)*(r^2-3r+9)=0$$
$$r^4-3r^3+9r^2+\frac{1}{2}r^3-\frac{3}{2}r^2+\frac{9}{2}r-\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}r-\frac{9}{2}=0$$
$$r^4-\frac{5}{2}r^3+7r^2+6r-\frac{9}{2}=0$$

Se multiplica el polinomio por la solución propuesta Cr^n.

$$r^4-\frac{5}{2}r^3+7r^2+6r-\frac{9}{2}=0$$
$$r^4Cr^n-\frac{5}{2}r^3Cr^n+7r^2Cr^n+6rCr^n-\frac{9}{2}Cr^n=0$$
$$Cr^{n+4}-\frac{5}{2}Cr^{n+3}+7Cr^{n+2}+6Cr^{n+1}-\frac{9}{2}Cr^n=0$$

Se sustituye Cr^n por a_n

$$\boxed{a_{n+4}-\frac{5}{2}a_{n+3}+7a_{n+2}+6a_{n+1}-\frac{9}{2}=0}$$