UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MATEMATICA INTERMEDIA 3 SECCION N
PRIMER EXAMEN PARCIAL

Instrucciones. Desarrolle y determine lo que se le pide a continuación. Trabaje en forma ordenada y con letra clara. Deje constancia de todo su procedimiento. Para tener derecho a revisión coloque sus respuestas con lapicero.

TEMA 1

Una barra de hierro se saca de un horno que está a $100\ ^\circ\mathrm{F}$ y se lleva al taller, donde será moldeada, en el cual la temperatura es de $25\ ^\circ\mathrm{F}$. Después de 2 minutos se mide la temperatura de la barra y es de $65\ ^\circ\mathrm{F}$.
¿A qué temperatura estará la barra después de 3 minutos de haber sido sacada del horno?

TEMA 2

Resuelva la ecuación diferencial. Indique el método que utilizó para resolverla.

$$(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$$

TEMA 3

Resuelva la ecuación diferencial. Indique el método que utilizó para resolverla.

$$(x + y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$$

TEMA 4

Resuelva la ecuación diferencial. Indique el método que utilizó para resolverla.

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$$

TEMA 5

Resuelva la ecuación diferencial. Indique el método que utilizó para resolverla.

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^4y^3$$

RESOLUCIÓN PRIMER EXAMEN PARCIAL

<u>TEMA 1</u> **MODELO CON ECUACIÓN DIFERENCIAL**

Modelo:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$

T temperatura de la barra en ºF

Tm temperatura del medio circundante en ºF

t tiempo en minutos

Datos:

$$Tm = 25\ °\mathrm{F}$$
$$T(0) = 100\ °\mathrm{F}$$
$$T(2) = 65\ °\mathrm{F}$$

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 25)$$

$$\int \frac{dT}{(T - 25)} = \int k\, dt$$

$$\ln|T - 25| = kt + C$$

$$e^{\ln|T-25|} = e^{kt+C}$$

$$T - 25 = e^{C}e^{kt}$$

Solución general:

$$\boldsymbol{T(t) = C_2 e^{kt} + 25}$$

Evaluar condiciones:

$$T(0) = 100\ °\mathrm{F}$$
$$100 = C_2 e^{0} + 25$$
$$C_2 = 100 - 25$$
$$\boldsymbol{C_2 = 75}$$

$$T(2) = 65\ °\mathrm{F}$$
$$65 = 75e^{2k} + 25$$
$$\frac{65 - 25}{75} = e^{2k}$$
$$\ln\frac{40}{75} = 2k$$
$$\boldsymbol{k = \frac{1}{2}\ln\frac{40}{75} = -0.3143}$$

Solución particular:

$$\boldsymbol{T(t) = 75e^{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{40}{75}\right)t} + 25}$$

¿A qué temperatura estará la barra después de 3 minutos de haber sido sacada del horno?

$$T(3) = ?$$

$$T(3) = 75e^{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{40}{75}\right)3} + 25$$

$$T(3) = 29.21 + 25$$

$$\boldsymbol{T(3) = 54.21}\ °\mathrm{F}$$

TEMA 2 **SEPARACIÓN DE VARIABLES**

$$(1+x^2+y^2+x^2y^2)dy = y^2dx$$

Por el método de Separación de Variables.

$$(1+x^2+y^2+x^2y^2)dy = y^2dx$$
$$((1+x^2)+y^2(1+x^2))dy = y^2dx$$
$$\big((1+x^2)(1+y^2)\big)dy = y^2dx$$
$$\frac{1+y^2}{y^2}dy = \frac{dx}{1+x^2}$$
$$\int\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)dy = \int\frac{dx}{1+x^2}$$
$$\int(y^{-2}+1)\,dy = \int\frac{dx}{1+x^2}$$
$$-y^{-1}+y = \tan^{-1}(x)+C$$

$$\boldsymbol{y - y^{-1} = \tan^{-1}(x) + C}$$

TEMA 3 **ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA**

$$(x+y)^2dx + (2xy+x^2-1)dy = 0$$

Por el método de Ecuaciones exactas.

$$(x+y)^2dx + (2xy+x^2-1)dy = 0$$

$$M = (x+y)^2 \quad ==> \quad M_y = 2x+2y$$
$$N = 2xy+x^2-1 \quad ==> \quad N_x = 2y+2x$$
$$M_y = N_x$$

$$f_M(x,y) = \int(x+y)^2\,dx = \int(x^2+2xy+y^2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + a(y)$$

$$f_N(x,y) = \int(2xy+x^2-1)\,dy = xy^2 + x^2y - y + b(x)$$

$$Comparamos$$
$$a(y) = -y \qquad ; \qquad b(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = c}$$

TEMA 4 **ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL**

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$$

Por el método de Ecuación diferencial lineal (factor de integración).

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$$

$$Factor\ de\ integración \qquad P(x) = 1$$
$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^{x}$$

$$e^{x}\frac{dy}{dx} + e^{x}y = e^{3x}e^{x}$$
$$\int d[e^{x}y] = \int e^{4x}\,dx$$
$$e^{x}y = \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}e^{3x} + Ce^{-x}}$$

TEMA 4 **ECUACIÓN DE BERNOULLI**

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^{4}y^{3}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^{3}y^{3}$$

$$n = 3$$
$$u = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$$
$$(1-n)y^{-n} = (1-3)y^{-3} = -2y^{-3}$$
$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = -2y^{-3} * \frac{dy}{dx}$$

$$(-2y^{-3})\frac{dy}{dx} + (-2y^{-3})\frac{y}{x} = x^{3}y^{3}(-2y^{-3})$$
$$(-2y^{-3})\frac{dy}{dx} - \frac{2y^{-2}}{x} = -2x^{3}$$
$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = -2x^{3}$$

$$Factor\ de\ integración \qquad P(x) = -\frac{2}{x}$$
$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln|x^{-2}|} = x^{-2}$$

$$x^{-2}\frac{du}{dx} - \frac{2}{x^{3}}u = -2x$$
$$d[x^{-2}u] = -2xdx$$
$$\int d[x^{-2}u] = \int -2x\,dx$$
$$x^{-2}u = -x^{2} + C$$
$$y^{-2} = -x^{4} + Cx^{2}$$

$$\boldsymbol{y^{2} = \frac{1}{Cx^{2} - x^{4}}}$$