Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *05/10/11* *Matemática Aplicada 2N*

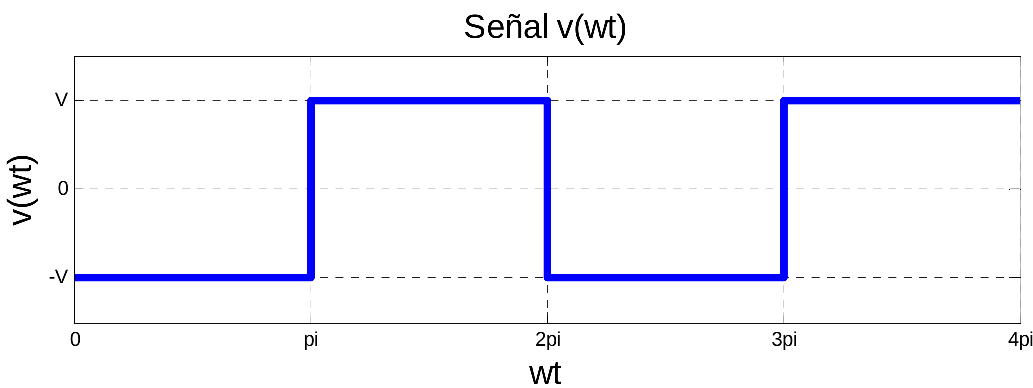
Segundo Examen Parcial

Temario **E**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. (33 puntos) SERIE EXPONENCIAL COMPLEJA DE FOURIER

Para la señal, $v(\omega t) = \begin{cases} -V & 0 < \omega t < \pi \\ V & \pi < \omega t < 2\pi \end{cases}$



a) Calcule su serie compleja

$$v(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \cdot e^{jn\omega t}$$

SOLUCION

Período: $T = 2\pi$

Frecuencia angular: $\omega_0 = 2\pi/T = 1$

Debido a que la forma de onda posee simetría impar de media onda, $\boldsymbol{V_0 = 0}$

Coeficientes complejos:

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\omega t) \cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} -V \cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} V \cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t$$

$$V_n = \frac{-V}{-jn2\pi} \cdot \left[e^{-jn\omega t}\right]_{\omega t=0}^{\pi} + \frac{V}{-jn2\pi} \cdot \left[e^{-jn\omega t}\right]_{\omega t=\pi}^{2\pi}$$

$$V_n = \frac{V}{j2\pi n} \cdot \left(e^{-jn\pi} - 1\right) - \frac{V}{j2\pi n} \cdot \left(e^{-jn2\pi} - e^{-jn\pi}\right)$$

$$V_n = \frac{V}{j2\pi n} \cdot ((-1)^n - 1) - \frac{V}{j2\pi n} \cdot (1 - (-1)^n)$$

$$V_n = \frac{V}{j2\pi n} \cdot ((-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n)$$

$$V_n = \frac{2V}{j2\pi n}((-1)^n - 1)$$

Tenemos entonces los coeficientes complejos:

$$\boldsymbol{V_n = j\frac{V}{n\pi}[1-(-1)^n]} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{V_m = j\frac{2V}{(2m-1)\pi}} \quad \boldsymbol{siendo\ n = 2m-1}$$

V_{-5}	V_{-4}	V_{-3}	V_{-2}	V_{-1}	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
$\frac{-2V}{5\pi}j$	0	$\frac{-2V}{3\pi}j$	0	$\frac{-2V}{\pi}j$	0	$\frac{2V}{\pi}j$	0	$\frac{2V}{3\pi}j$	0	$\frac{2V}{5\pi}j$

Serie exponencial compleja:

$$\boldsymbol{v(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{j\frac{V}{n\pi}[1-(-1)^n]\cdot e^{j(n\omega t)}} \quad \boldsymbol{para\ n\ impar} \quad \&\, n \neq 0$$

O bien

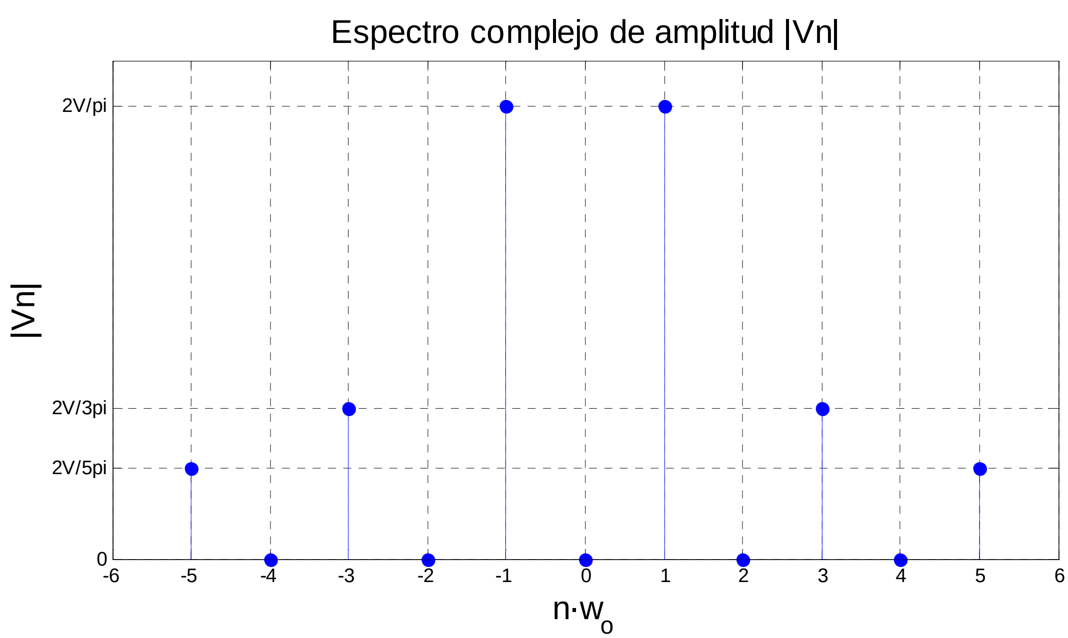
$$\boldsymbol{v(\omega t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{j\frac{2V}{(2m-1)\pi}\cdot e^{j(2m-1)\omega t}} \qquad \boldsymbol{para\ todo\ m}$$

b) Dibuje su espectro de amplitud

SOLUCION

$$|\boldsymbol{V_n}| = \left|\boldsymbol{\frac{V}{n\pi}[1-(-1)^n]}\right|$$

$\lvert V_{-5}\rvert$	$\lvert V_{-4}\rvert$	$\lvert V_{-3}\rvert$	$\lvert V_{-2}\rvert$	$\lvert V_{-1}\rvert$	$\lvert V_0\rvert$	$\lvert V_1\rvert$	$\lvert V_2\rvert$	$\lvert V_3\rvert$	$\lvert V_4\rvert$	$\lvert V_5\rvert$
$\frac{2V}{5\pi}$	0	$\frac{2V}{3\pi}$	0	$\frac{2V}{\pi}$	0	$\frac{2V}{\pi}$	0	$\frac{2V}{3\pi}$	0	$\frac{2V}{5\pi}$

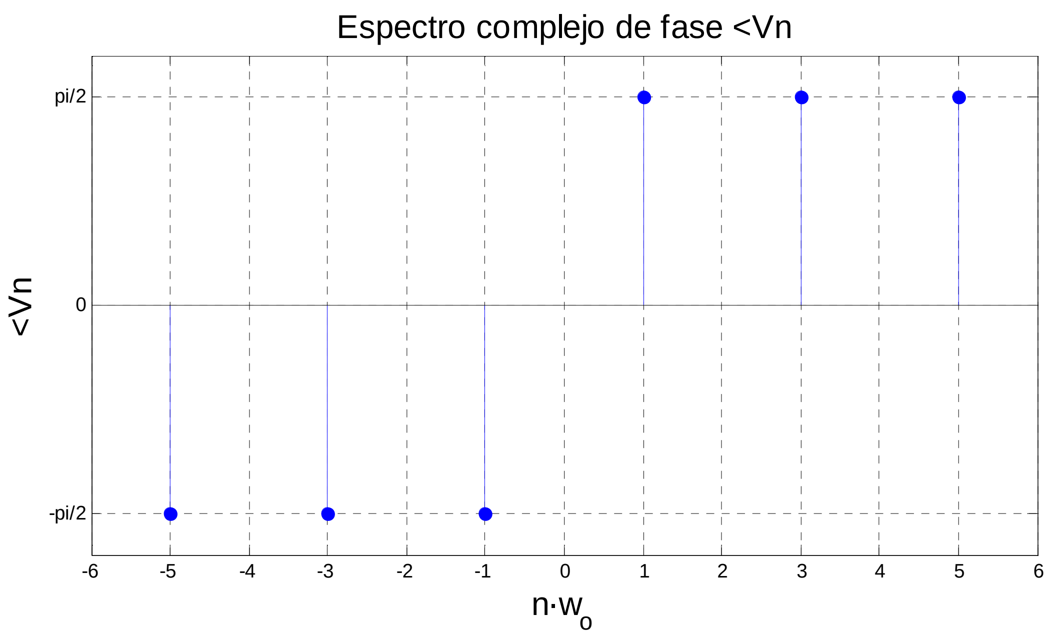


c) Dibuje su espectro de fase

$$\angle \boldsymbol{V_n} = \begin{cases} \boldsymbol{-\pi/2} & \boldsymbol{para\ n} < 0\ impares \\ \boldsymbol{\pi/2} & \boldsymbol{para\ n} > 0\ impares \end{cases}$$

SOLUCION

$\angle V_{-5}$	$\angle V_{-4}$	$\angle V_{-3}$	$\angle V_{-2}$	$\angle V_{-1}$	$\angle V_0$	$\angle V_1$	$\angle V_2$	$\angle V_3$	$\angle V_4$	$\angle V_5$
$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$



TEMA 2. (33 puntos) **ECUACION DIFERENCIAL**

La ecuación que gobierna la carga q sobre un capacitor de un circuito eléctrico RLC es

$$q'' + 2\alpha q' + \omega^2 q = \omega^2 E$$

Donde $\alpha = R/2L$, $\omega^2 = 1/(RC)$, R denota la resistencia, C denota la capacitancia, L denota inductancia, y E es la fuerza electromotriz del circuito. Suponga que $R = L = C = 1$, y E esta dada por

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{-jn\omega_0 t}$$

Encuentre $q(t)$ (su respuesta debe quedar en términos de $c(n)$ que se supone conocida)

SOLUCION

Dado que $R = L = C = 1$, entonces

$$\alpha = R/2L = 1/2 \qquad \omega^2 = 1/(1) = 1$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$q'' + \frac{2}{2} q' + (1)q = (1)E$$
$$q'' + q' + q = E$$

Para calcular la carga, en estado permanente, en el capacitor producida por el número infinito de fuentes:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{-jn\omega_0 t}$$

Se supone:

$$q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\omega_0 t}$$

La primera derivada de la carga respecto al tiempo:

$$q' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (-jn\omega_0) e^{-jn\omega_0 t}$$

La segunda derivada de la carga respecto al tiempo:

$$q'' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (-jn\omega_0)^2 e^{-jn\omega_0 t}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$q'' + q' + q = E$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(-jn\omega_0)^2 e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(-jn\omega_0) e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n[(-jn\omega_0)^2 - jn\omega_0 + 1] e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n[1 - (n\omega_0)^2 - jn\omega_0] e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{-jn\omega_0 t}$$

$$A_n[1 - (n\omega_0)^2 - jn\omega_0] = c(n)$$

$$A_n = \frac{c(n)}{1 - (n\omega_0)^2 - jn\omega_0}$$

Sustituimos el Coeficiente A_n en la expresión de la carga supuesta:

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\boldsymbol{q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c(n)}{1 - (n\omega_0)^2 - jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t}}$$

TEMA 3. (34 puntos) APLICACIÓN: CIRCUITO ELECTRICO

La onda de tensión aplicada a un circuito RL con $R = 10$ ohmios y $L = 5$ henrios, esta dada por la serie

$$v(t) = \frac{2}{\pi}\sin(\omega t) - \frac{1}{\pi}\sin(2\omega t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\omega t) - \frac{1}{2\pi}\sin(4\omega t) + \cdots$$

Donde $\omega = 377\ rads/seg$

La serie de la corriente se puede determinar, calculando la corriente de cada armónica i_n y luego sumándolas (principio de superposición). La corriente de la armónica n, es

$$i_n = (V_n/|Z_n|)\sin(n\omega t - \theta_n)$$

Donde V_n es la amplitud de la tensión armónica n, $|Z_n|$ es el modulo de la impedancia armónica n dada por $Z_n = R + j\omega L$, y $\theta_n = \tan^{-1}(n\omega L/R)$ es el ángulo de desfase. Elabore una tabla similar a la siguiente, determine la corriente de cada armónica y establezca corriente del circuito. (Nota. Las armónicas i_n conservan signos de sus correspondientes v_n)

SOLUCION

Por el método de tensión, corriente e impedancia compleja

$$Z_n = R + j\omega L \qquad \theta_n = \tan^{-1}(n\omega L/R) \qquad I_n = (V_n/|Z_n|)$$

n	$V_n\ (V)$	$R\ (\Omega)$	$jn\omega L\ (\Omega)$	$Z_n\ (\Omega)$	$\lvert Z_n\rvert\ (\Omega)$	$\theta_n\ (rad\quad º)$	$\boldsymbol{I_n\ (A)}$
1	$\frac{2}{\pi}$	10	$j1885$	$10 + j1885$	1885.03	1.5655 89.7º	$\mathbf{337.72 \cdot 10^{-6}}$
2	$-\frac{1}{\pi}$	10	$j3770$	$10 + j3770$	3770.01	1.5681 89.85º	$\mathbf{-84.43 \cdot 10^{-6}}$
3	$\frac{2}{3\pi}$	10	$j5655$	$10 + j5655$	5655.01	1.5690 89.90º	$\mathbf{37.52 \cdot 10^{-6}}$
4	$-\frac{1}{2\pi}$	10	$j7540$	$10 + j7540$	7540.01	1.5695 89.92º	$\mathbf{-21.11 \cdot 10^{-6}}$

Corrientes armónicas, en ***microamperios****:*

$$\boldsymbol{i_1 = 337.72\sin(\omega t - 89.7º)}$$
$$\boldsymbol{i_2 = -84.43\sin(2\omega t - 89.85º)}$$
$$\boldsymbol{i_3 = 37.52\sin(3\omega t - 89.9º)}$$
$$\boldsymbol{i_4 = -21.11\sin(4\omega t - 89.92º)}$$

La corriente aproximada, en ***microamperios****, del circuito será la serie:*

$$i(t) = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + + \cdots$$

$$\boldsymbol{i(t) = 337.72\sin(\omega t - 89.7º) - 84.43\sin(2\omega t - 89.85º) + 37.52\sin(3\omega t - 89.9º) - 21.11\sin(4\omega t - 89.92º) + \cdots}$$

Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *03/10/11* *Matemática Aplicada 2N*

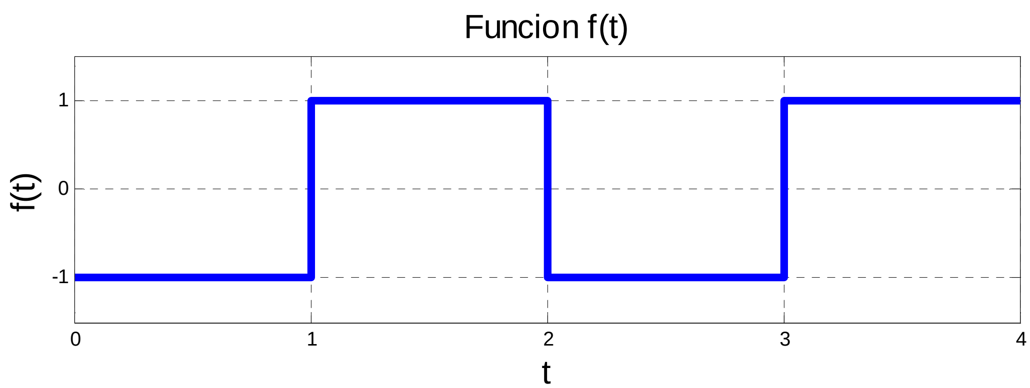
Segundo Examen Parcial

Temario **Q**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. (33 puntos) SERIE EXPONENCIAL COMPLEJA DE FOURIER

Para la función, $f(t) = \begin{cases} -1 & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \end{cases}$



a) Calcule su serie compleja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

SOLUCION

Período: $T = 2$

Frecuencia angular: $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$

Debido a que la forma de onda posee simetría impar de media onda, $\boldsymbol{V_0 = 0}$

Coeficientes complejos:

$$V_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$V_n = \frac{1}{2}\int_0^1 -1 \cdot e^{-jn\pi t}\, d\omega t + \frac{1}{2}\int_1^2 1 \cdot e^{-jn\pi t}\, d\omega t$$

$$V_n = \frac{-1}{-j2\pi n} \cdot \left[e^{-jn\pi t}\right]_{t=0}^{1} + \frac{1}{-j2\pi n} \cdot \left[e^{-jn\pi t}\right]_{t=1}^{2}$$

$$V_n = \frac{1}{j2\pi n} \cdot \left(e^{-jn\pi} - 1\right) - \frac{1}{j2\pi n} \cdot \left(e^{-jn2\pi} - e^{-jn\pi}\right)$$

$$V_n = \frac{1}{j2\pi n} \cdot ((-1)^n - 1) - \frac{1}{j2\pi n} \cdot (1 - (-1)^n)$$

$$V_n = \frac{1}{j2\pi n} \cdot ((-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n)$$

$$V_n = \frac{2}{j2\pi n}((-1)^n - 1)$$

$$V_n = j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n] \quad \text{ó} \quad V_n = j\frac{2}{(2m-1)\pi} \quad \textit{siendo } n = 2m-1$$

V_{-5}	V_{-4}	V_{-3}	V_{-2}	V_{-1}	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
$\frac{-2}{5\pi}j$	0	$\frac{-2}{3\pi}j$	0	$\frac{-2}{\pi}j$	0	$\frac{2}{\pi}j$	0	$\frac{2}{3\pi}j$	0	$\frac{2}{5\pi}j$

Serie exponencial compleja:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]\cdot e^{j(n\pi t)} \quad \textit{para n impar} \quad \& \, n \neq 0$$

O bien:

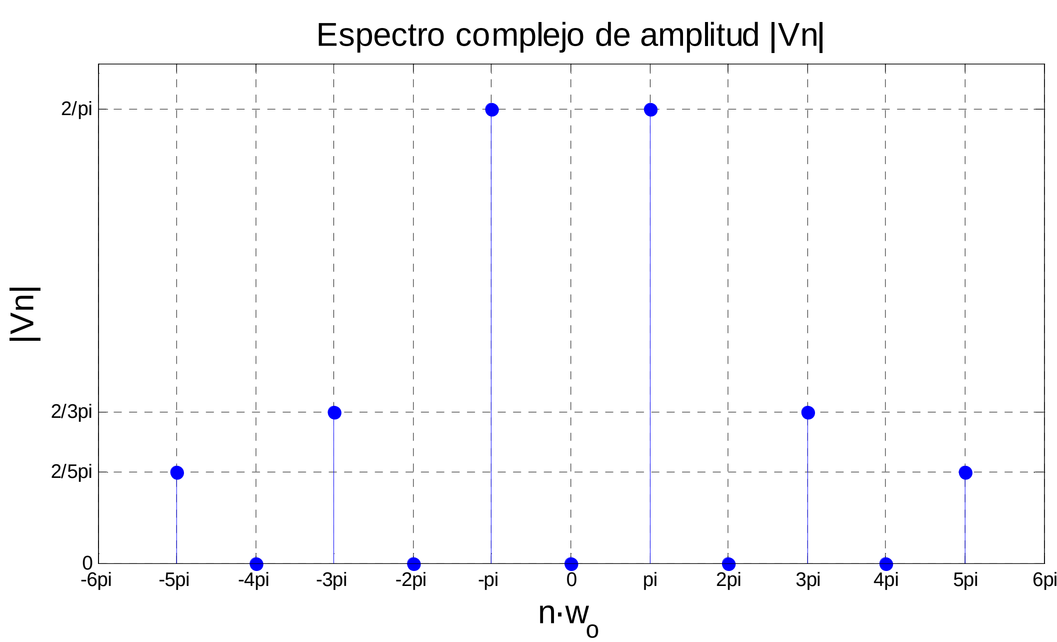
$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j\frac{2}{(2m-1)\pi}\cdot e^{j(2m-1)\pi t} \qquad \textit{para todo m}$$

b) Dibuje su espectro de amplitud

SOLUCION

$$|V_n| = \left|\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\right|$$

$\lvert V_{-5}\rvert$	$\lvert V_{-4}\rvert$	$\lvert V_{-3}\rvert$	$\lvert V_{-2}\rvert$	$\lvert V_{-1}\rvert$	$\lvert V_0\rvert$	$\lvert V_1\rvert$	$\lvert V_2\rvert$	$\lvert V_3\rvert$	$\lvert V_4\rvert$	$\lvert V_5\rvert$
$\frac{2}{5\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$



TEMA 2. (33 puntos) ECUACION DIFERENCIAL

Para calcular la temperatura en una placa sometida a un flujo de calor periódico se tiene la ecuación diferencial,

$$\frac{d\theta}{dt} + m\theta = Q\left[50 + 100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)t\right]$$

Resuelva esta ecuación diferencial y determine la serie de $\theta(t)$, luego determine la serie de la temperatura $T(t)$, si $T(t) = \theta(t) + 100°\mathrm{F}$

SOLUCION

Para calcular la serie $\theta(t)$, en estado permanente, producida por el número infinito de fuentes:

$$f(t) = 50 + 100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)t$$

Se supone:

$$\theta(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(2n-1)t + B_n\sin(2n-1)t]$$

La primera derivada de $\theta(t)$ respecto al tiempo:

$$\theta'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[-A_n(2n-1)\sin(2n-1)t + B_n(2n-1)\cos(2n-1)t]$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}&[-A_n(2n-1)\sin(2n-1)t + B_n(2n-1)\cos(2n-1)t]\\ &+ m\left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(2n-1)t + B_n\sin(2n-1)t]\right)\\ &= Q\left[50 + 100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)t\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}&[-A_n(2n-1)\sin(2n-1)t + B_n(2n-1)\cos(2n-1)t] + mA_0\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}[mA_n\cos(2n-1)t + mB_n\sin(2n-1)t]\\ &= \left[Q50 + Q100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)t\right]\end{aligned}$$

$$mA_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(B_n(2n-1) + mA_n)\cos(2n-1)t + (-A_n(2n-1) + mB_n)\sin(2n-1)t]$$
$$= \left[Q50 + Q100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n-1)}\cos(2n-1)t\right]$$

Igualando coeficientes de senos y cosenos, y términos independientes, queda el sistema de ecuaciones:

$$mA_0 = Q50$$
$$B_n(2n-1) + mA_n = \frac{Q100}{\pi(2n-1)}$$
$$-A_n(2n-1) + mB_n = 0$$

De la cual se tienen:

$$A_0 = \frac{Q50}{m} \quad A_n = \frac{mQ100}{\pi(2n-1)[(2n-1)^2 + m^2]} \quad B_n = \frac{Q100}{\pi[(2n-1)^2 + m^2]}$$

Sustituir en la solución supuesta:

$$\boldsymbol{\theta(t) = \frac{Q50}{m} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{mQ100}{\pi(2n-1)[(2n-1)^2 + m^2]}\cos(2n-1)t + \frac{Q100}{\pi[(2n-1)^2 + m^2]}\sin(2n-1)t\right]}$$

La serie de la Temperatura queda expresada de la siguiente manera:

$$T(t) = \theta(t) + 100°\mathrm{F}$$

$$\boldsymbol{T(t) = 100 + \frac{Q50}{m} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{mQ100}{\pi(2n-1)[(2n-1)^2 + m^2]}\cos(2n-1)t + \frac{Q100}{\pi[(2n-1)^2 + m^2]}\sin(2n-1)t\right]}$$

TEMA 3. (34 puntos) **APLICACIÓN: TEMPERATURA**
En el cálculo de la temperatura en una placa se tiene la suma,

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \exp\left(\frac{a^2 n^2 \pi^2}{4} t\right)$$

En $t = 0$, se tiene la temperatura inicial

$$T(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \qquad 0 < x < 2$$

Donde $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 < x < 2 \end{cases}$

Usando la serie de medio rango determine en coeficiente B_n, sustituya y determine $T(x,t)$ (Use la formula para el cálculo del coeficiente de medio rango)

SOLUCION
Utilizando la serie de medio rango:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x < L$$

Por lo tanto $L = 2$, y B_n se determina por la expresión:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$B_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$
$$B_n = \int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$B_n = \left[\frac{4\sin(n\pi x/2\,)}{n^2\pi^2} - \frac{2x\cos(n\pi x/2)}{n\pi}\right]_{x=0}^{1} + \left[\frac{2[n\pi(x-2)\cos(n\pi x/2) - 2\sin(n\pi x/2)]}{n^2\pi^2}\right]_{x=1}^{2}$$

$$B_n = \frac{2}{n^2\pi^2}[2\sin(n\pi x/2\,) - n\pi x\cos(n\pi x/2)]_{x=0}^{1}$$
$$+ \frac{2}{n^2\pi^2}[n\pi(x-2)\cos(n\pi x/2) - 2\sin(n\pi x/2)]_{x=1}^{2}$$

$$B_n = \frac{2}{n^2\pi^2}[2\sin(n\pi/2\,) - n\pi\cos(n\pi/2) - 2\sin(0\,) + n\pi(0)\cos(0)]$$
$$+ \frac{2}{n^2\pi^2}[n\pi(0)\cos(n\pi) - 2\sin(n\pi) - n\pi(-1)\cos(n\pi/2) + 2\sin(n\pi/2)]$$

$$B_n = \frac{2}{n^2\pi^2}[2\sin(n\pi/2\ ) - n\pi\cos(n\pi/2)] + \frac{2}{n^2\pi^2}[n\pi\cos(n\pi/2) + 2\sin(n\pi/2)]$$

$$B_n = \frac{2}{n^2\pi^2}[2\sin(n\pi/2\ ) - n\pi\cos(n\pi/2) + n\pi\cos(n\pi/2) + 2\sin(n\pi/2)]$$

$$B_n = \frac{2}{n^2\pi^2}[4\sin(n\pi/2\ )]$$

$$B_n = \frac{8\sin(n\pi/2\ )}{n^2\pi^2}$$

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^2\pi^2} & n = 1,5,9\ldots \\ \dfrac{-8}{n^2\pi^2} & n = 3,7,11\ldots \\ 0 & n\ par \end{cases}$$

Tomando: $n = 2m - 1$

$$B_m = \frac{-8(-1)^m}{(2m-1)^2\pi^2} \qquad m = 1, 2\ ,3\ldots$$

Por tanto, la distribución de la temperatura sobre cualquier punto sobre la placa está dada por

$$\boldsymbol{T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sin(n\pi/2\ )}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \exp\left(\frac{a^2 n^2\pi^2}{4}t\right) \quad para\ n\ impar} \quad \&\ n \neq 0$$

O bien:

$$\boldsymbol{T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-8(-1)^m}{(2m-1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right) \exp\left(\frac{a^2(2m-1)^2\pi^2}{4}t\right) \qquad para\ todo\ m}$$