Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *05/10/11* *Matemática Aplicada 5N*

Segundo Examen Parcial

Temario **A**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. (20 puntos) FUNCION COMPLEJA

a) Determine la parte real e imaginaria de $f(z) = z + 1/z$

SOLUCION

$$f(z) = z + 1/z$$
$$f(z) = f(x+jy) = x + jy + 1/(x+jy)$$
$$f(x+jy) = x + jy + \frac{1}{x+jy} \cdot \frac{x-jy}{x-jy}$$
$$f(x+jy) = x + jy + \frac{x-jy}{x^2+y^2}$$
$$f(x+jy) = x + jy + \frac{x}{x^2+y^2} - j\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$f(x+jy) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + j\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\mathbf{Re}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2} \qquad \mathbf{Im}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$$

b) Determine la parte real e imaginaria de $\cos z = (e^{jz} + e^{-jz})/2$

SOLUCION

$$\cos z = \left(e^{jz} + e^{-jz}\right)/2$$
$$\cos z = \cos(x+jy) = \left(e^{j(x+jy)} + e^{-j(x+jy)}\right)/2$$
$$\cos(x+jy) = \left(e^{jx-y} + e^{-jx+y}\right)/2$$
$$\cos(x+jy) = \left(e^{-y}e^{jx} + e^{y}e^{-jx}\right)/2$$

$$\cos(x+jy) = \left(e^{-y}(\cos x + j\sin x) + e^{y}(\cos(-x) + j\sin(-x))\right)/2$$
$$\cos(x+jy) = \left(e^{-y}(\cos x + j\sin x) + e^{y}(\cos(-x) + j\sin(-x))\right)/2$$
$$\cos(x+jy) = (e^{-y}\cos x + e^{-y}j\sin x + e^{y}\cos x - e^{y}j\sin x)/2$$
$$\cos(x+jy) = \left((e^{y} + e^{-y})\cos x - (e^{y} - e^{-y})j\sin x\right)/2$$

$$\cos(x+jy) = \frac{(e^{y} + e^{-y})}{2}\cos x - j\frac{(e^{y} - e^{-y})}{2}\sin x$$

$$\cos(x+jy) = \cosh y \cos x - j\sinh y \sin x$$

$$\mathbf{Re}[\cos \boldsymbol{z}] = \mathbf{cosh}\, \boldsymbol{y} \,\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x} \qquad \mathbf{Im}[\cos \boldsymbol{z}] = -\,\mathbf{sinh}\, \boldsymbol{y}\, \mathbf{sin}\, \boldsymbol{x}$$

TEMA 2. (20 puntos) **TRANSFORMACION COMPLEJA**

Determine y dibuje la imagen de la región rectangular en el plano Z limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, & $y = 1$; bajo la transformación $w = (1 + i)z + (1 + 2i)$

SOLUCION

$$w = (1 + j)z + (1 + 2j) = \sqrt{2}e^{j\pi/4} \cdot re^{j\theta} + (1 + 2j)$$
$$w(r, \theta) = \sqrt{2}re^{j(\theta+\pi/4)} + (1 + 2j)$$

La transformación realiza: Estiramiento por $\sqrt{2}$, Rotación antihoraria de $\pi/4$ rad y Traslación.

$$w = (1 + j)z + (1 + 2j) = (1 + j)(x + jy) + (1 + 2j)$$
$$w(x, y) = x - y + 1 + j(x + y + 2)$$

Ecuaciones de las rectas transformadas:

$$w(0, y) = -y + 1 + j(y + 2)$$
$$u = -y + 1 \qquad v = y + 2$$
$$y = 1 - u \qquad y = v - 2$$
$$1 - u = v - 2$$
$$\mathbf{3 = v + u}$$

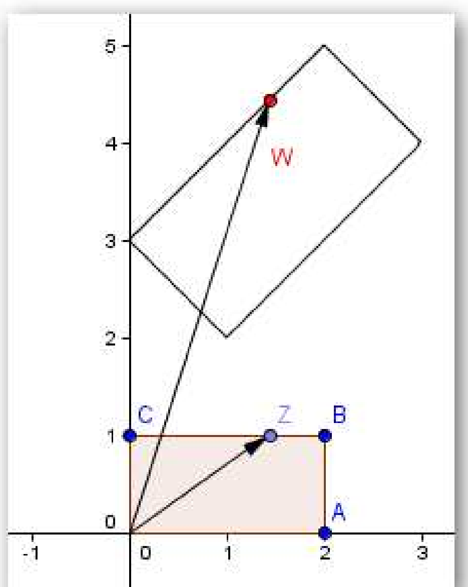
$$w(x, 0) = x + 1 + j(x + 2)$$
$$u = x + 1 \qquad v = x + 2$$
$$x = u - 1 \qquad x = v - 2$$
$$u - 1 = v - 2$$
$$\mathbf{1 = v - u}$$

$$w(2, y) = 2 - y + 1 + j(2 + y + 2)$$
$$w(2, y) = -y + 3 + j(y + 4)$$
$$u = -y + 3 \qquad v = y + 4$$
$$y = 3 - u \qquad y = v - 4$$
$$3 - u = v - 4$$
$$\mathbf{7 = v + u}$$

$$w(x, 1) = x - 1 + 1 + j(x + 1 + 2)$$
$$w(x, 1) = x + j(x + 3)$$
$$u = x \qquad v = x + 3$$
$$x = u \qquad x = v - 3$$
$$u = v - 3$$
$$\mathbf{3 = v - u}$$

Vértices:

$$w(0,0) = 1 + j2 \quad w(0,1) = j3 \quad w(2,0) = 3 + j4 \quad w(2,1) = 2 + j5$$



TEMA 3. (20 puntos) APLICACIÓN: LINEAS DE TRANSMISION

La tensión en el extremo generador V_S de una línea de transmisión larga se calcula con la formula,

$$V_S = V_R \cosh \gamma l + I_R Z_C \sinh \gamma l \qquad Voltios$$

Calcule V_S, si $V_R = 115{,}200\measuredangle 0º$, $\gamma l = 0.0481 + j0.465$, $I_R = 361\measuredangle 0º$, y $Z_C = 405\measuredangle(-5.9º)$

Recuerde: $\cosh z = \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y$, $\sinh z = \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y$

SOLUCION

$$V_S = V_R \cosh \gamma l + I_R Z_C \sinh \gamma l$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)\cosh(0.0481 + j0.465) + (361\measuredangle 0º)\big(405\measuredangle(-5.9º)\big)\sinh(0.0481 + j0.465)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)\cosh(0.0481 + j0.465) + \big(146{,}205\measuredangle(-5.9º)\big)\sinh(0.0481 + j0.465)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)(\cosh(0.0481)\cos(0.465) + j\sinh(0.0481)\sin(0.465)) + \big(146{,}205\measuredangle(-5.9º)\big)(\sinh(0.0481)\cos(0.465) + j\cosh(0.0481)\sin(0.465))$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)\big((1.001)(0.8938) + j(0.04811)(0.4484)\big) + \big(146{,}205\measuredangle(-5.9º)\big)\big((0.04811)(0.8938) + j(1.001)(0.4484)\big)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)(0.8948 + j0.0216) + \big(146{,}205\measuredangle(-5.9º)\big)(0.043 + j0.4489)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)(0.8951\measuredangle 1.38º) + \big(146{,}205\measuredangle(-5.9º)\big)(0.451\measuredangle 84.53º)$$

$$V_S = (103{,}117.35\measuredangle 1.38º) + (65{,}938\measuredangle 78.63º)$$

$$V_S = 103{,}087.38 + j2{,}485.72 + 13{,}001.92 + j64{,}643.44$$

$$V_S = 116{,}089.31 + j67{,}129.16$$

$$\boldsymbol{V_S = 134{,}100.9\measuredangle 30.04º} \qquad \boldsymbol{Voltios}$$

TEMA 4. (20 puntos) APLICACIÓN: TRANSFORMACIONES EN LINEAS DE TRANSMISION

Para determinar las líneas equipotenciales de una línea de transmisión ubicada en $y = 80$ *con retorno aterrizado* que corre paralela al plano aterrizado en $y = 40$ se usa la transformación $w = 6400/z$. Determine la imagen del plano $z = x + j40$, y la imagen de la línea en $z = j80$ bajo dicha transformación.

SOLUCION

$$w = \frac{6400}{z} = \frac{6400}{x+jy} \cdot \frac{x-jy}{x-jy} = \frac{6400}{x^2+y^2}(x-jy) \quad Entonces \quad w(x,y) = \frac{6400}{x^2+y^2}(x-jy)$$

Transformación del punto $(0{,}80)$

$$w(0{,}80) = \frac{6400}{0+6400}(0-j80) = \boldsymbol{-j80}$$

Transformación de la recta $z = x + j40$. *Despejando z:*

$$z(x,40) = \frac{6400}{w} = \frac{6400}{u+jv} \cdot \frac{u-jv}{u-jv}$$

$$z(x,40) = \frac{6400}{u^2+v^2}(u-jv)$$

$$x = \frac{6400u}{u^2+v^2} \qquad 40 = \frac{-6400v}{u^2+v^2}$$

Tomando la ecuación de la parte imaginaria:

$$40 = \frac{-6400v}{u^2+v^2}$$

$$u^2+v^2 = \frac{-6400}{40}v$$

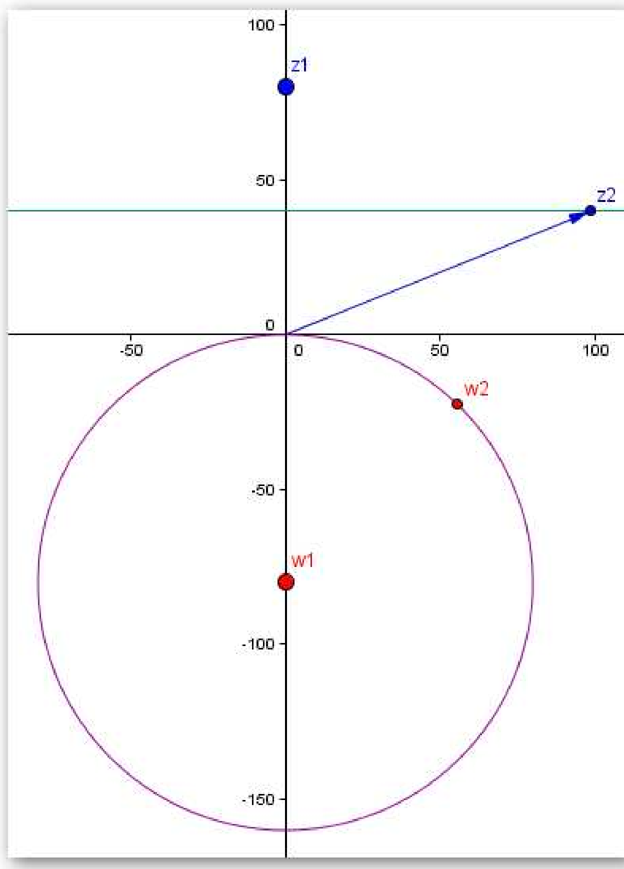
$$u^2+v^2 = -160v$$

$$u^2+v^2+160v = 0$$

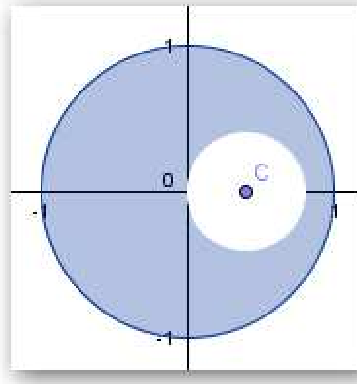
$$u^2+v^2+160v+6400 = 6400$$

$$\boldsymbol{u^2+(v+80)^2 = 80^2}$$

Tenemos entonces una circunferencia con centro en $(\boldsymbol{u=0, v=-80})$ ***y radio de*** $\mathbf{80}$.



TEMA 5. (20 puntos) APLICACIÓN: POTENCIAL ELECTROSTATICO



El cable no coaxial cuya sección transversal se muestra en la figura está formado por un cilindro exterior de radio 1 centrado en el origen, y un cilindro interior de radio $2/5$ centrado en $(2/5,0)$

La función que describe el potencial electrostático en cualquier punto (x, y) de la región entre ambos cilindros es la **parte real** de la función compleja:

$$f(z) = \frac{\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)}{\ln 2} + 1$$

a) Determine la función potencial electrostática $U(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$

$$U(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$$
$$f(z) = \frac{\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)}{\ln 2} + 1$$

Recordando que:

$$\ln(z) = \ln\left(re^{j\theta}\right) = \ln(r) + j\theta$$
$$\operatorname{Re}[\ln(z)] = \ln(r) = \ln(|z|)$$

Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right) + 1$$

$$\operatorname{Re}[f(z)] = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left|\frac{2z-1}{z-2}\right|\right) + 1 = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{|2z-1|}{|z-2|}\right) + 1$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{|2x + j2y - 1|}{|x + jy - 2|}\right) + 1$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\sqrt{(2x-1)^2 + 4y^4}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}\right) + 1$$

$$U(x, y) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left(\frac{(2x-1)^2 + 4y^4}{(x-1)^2 + y^2}\right)^{1/2}\right) + 1$$

$$\boldsymbol{U(x, y) = \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(\frac{(2x-1)^2 + 4y^4}{(x-1)^2 + y^2}\right) + 1}$$

b) Determine el valor del potencial en el punto $(-1/2, 1/2)$

$$U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{(-2/2-1)^2 + 4(1/2)^2}{(-1/2-2)^2 + (1/2)^2}\right) + 1$$

$$U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{5}{13/2}\right) + 1$$

$$\boldsymbol{U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{10}{13}\right) + 1}$$

$$\boldsymbol{U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.8107 \qquad Voltios}$$

c) El cilindro exterior está a un mismo potencial, determine su potencial.

$$Punto\ sobre\ el\ cilindro\ exterior: \qquad (1,0)$$

$$U(1,0) = \frac{1}{2\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{(2-1)^2 + 4(0)}{(1-2)^2 + (0)}\right) + 1$$

$$\boldsymbol{U(1,0) = \frac{1}{2\ln 2} \cdot \ln(1) + 1}$$

$$\boldsymbol{U(1,0) = 1 \qquad Voltios}$$

Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *05/10/11* *Matemática Aplicada 5N*

Segundo Examen Parcial

Temario **B**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. (20 puntos) FUNCION COMPLEJA

c) Determine la parte real e imaginaria de $f(z) = z - 1/z$

SOLUCION

$$f(z) = z - 1/z$$
$$f(z) = f(x+jy) = x + jy - 1/(x+jy)$$
$$f(x+jy) = x + jy - \frac{1}{x+jy} \cdot \frac{x-jy}{x-jy}$$
$$f(x+jy) = x + jy - \frac{x-jy}{x^2+y^2}$$
$$f(x+jy) = x + jy - \frac{x}{x^2+y^2} + j\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$f(x+jy) = x - \frac{x}{x^2+y^2} + j\left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+y^2}} \qquad \mathbf{Im}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x^2+y^2}}$$

d) Determine la parte real e imaginaria de $\sin z = (e^{jz} - e^{-jz})/2j$

SOLUCION

$$\sin z = \left(e^{jz} - e^{-jz}\right)/2j$$
$$\sin z = \sin(x+jy) = \left(e^{j(x+jy)} - e^{-j(x+jy)}\right)/2j$$
$$\sin(x+jy) = \left(e^{jx-y} - e^{-jx+y}\right)/2j$$
$$\sin(x+jy) = \left(e^{-y}e^{jx} - e^{y}e^{-jx}\right)/2j$$

$$\sin(x+jy) = \left(e^{-y}(\cos x + j\sin x) - e^{y}(\cos(-x) + j\sin(-x))\right)/2j$$
$$\sin(x+jy) = \left(e^{-y}(\cos x + j\sin x) - e^{y}(\cos(-x) + j\sin(-x))\right)/2j$$
$$\sin(x+jy) = -j(e^{-y}\cos x + e^{-y}j\sin x - e^{y}\cos x + e^{y}j\sin x)/2$$
$$\sin(x+jy) = -j(-(e^{y} - e^{-y})\cos x + (e^{y} + e^{-y})j\sin x)/2$$

$$\sin(x+jy) = j\frac{(e^{y} - e^{-y})}{2}\cos x + \frac{(e^{y} + e^{-y})}{2}\sin x$$

$$\sin(x+jy) = j\sinh y\cos x + \cosh y\sin x$$
$$\sin(x+jy) = \cosh y\sin x + j\sinh y\cos x$$

$$\mathbf{Re}[\mathbf{sin}\,\boldsymbol{z}] = \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{cosh}\,\boldsymbol{y} \qquad \mathbf{Im}[\mathbf{sin}\,\boldsymbol{z}] = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{sinh}\,\boldsymbol{y}$$

TEMA 2. (20 puntos) TRANSFORMACION COMPLEJA

Determine y dibuje la imagen de la región rectangular en el plano Z limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, & $y = 2$; bajo la transformación $w = (1 + j)z + (1 + 2j)$

SOLUCION

$$w = (1 + j)z + (1 + 2j) = \sqrt{2}e^{j\pi/4} \cdot re^{j\theta} + (1 + 2j)$$
$$w(r, \theta) = \sqrt{2}re^{j(\theta+\pi/4)} + (1 + 2j)$$

La transformación realiza: Estiramiento por $\sqrt{2}$, Rotación antihoraria de $\pi/4$ rad y Traslación.

$$w = (1 + j)z + (1 + 2j) = (1 + j)(x + jy) + (1 + 2j)$$
$$w(x, y) = x - y + 1 + j(x + y + 2)$$

Ecuaciones de las rectas transformadas:

$$w(0, y) = -y + 1 + j(y + 2)$$
$$u = -y + 1 \qquad v = y + 2$$
$$y = 1 - u \qquad y = v - 2$$
$$1 - u = v - 2$$
$$\boldsymbol{3 = v + u}$$

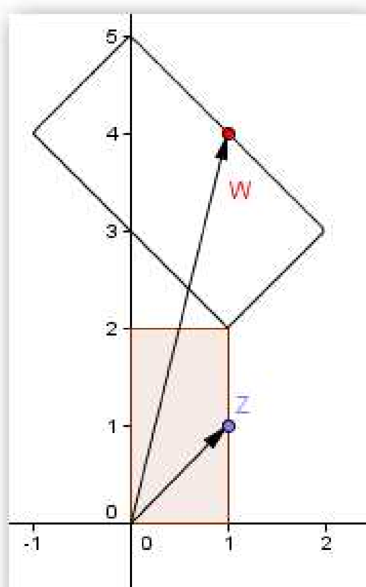
$$w(x, 0) = x + 1 + j(x + 2)$$
$$u = x + 1 \qquad v = x + 2$$
$$x = u - 1 \qquad x = v - 2$$
$$u - 1 = v - 2$$
$$\boldsymbol{1 = v - u}$$

$$w(1, y) = 1 - y + 1 + j(1 + y + 2)$$
$$w(1, y) = -y + 2 + j(y + 3)$$
$$u = -y + 2 \qquad v = y + 3$$
$$y = 2 - u \qquad y = v - 3$$
$$2 - u = v - 3$$
$$\boldsymbol{5 = v + u}$$

$$w(x, 2) = x - 2 + 1 + j(x + 2 + 2)$$
$$w(x, 2) = x - 1 + j(x + 4)$$
$$u = x - 1 \qquad v = x + 4$$
$$x = u + 1 \qquad x = v - 4$$
$$u + 1 = v - 4$$
$$\boldsymbol{5 = v - u}$$

Vértices:

$$w(0,0) = 1 + j2 \quad w(0,2) = -1 + j4 \quad w(1,0) = 2 + j3 \quad w(1,2) = j5$$



TEMA 3. (20 puntos) APLICACIÓN: LINEAS DE TRANSMISION

La tensión en el extremo generador V_S de una línea de transmisión larga se calcula con la formula,

$$V_S = V_R \cosh \gamma l + I_R Z_C \sinh \gamma l \qquad Voltios$$

Calcule V_S, si $V_R = 115{,}200\measuredangle 0º$, $\gamma l = 0.0381 + j0.365$, $I_R = 351\measuredangle 0º$, y $Z_C = 405\measuredangle(-5.9º)$

Recuerde: $\cosh z = \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y$, $\sinh z = \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y$

SOLUCION

$$V_S = V_R \cosh \gamma l + I_R Z_C \sinh \gamma l$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º) \cosh(0.0381 + j0.365) + (351\measuredangle 0º)\big(405\measuredangle(-5.9º)\big) \sinh(0.0381 + j0.365)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º) \cosh(0.0381 + j0.365) + \big(142{,}155\measuredangle(-5.9º)\big) \sinh(0.0381 + j0.365)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)(\cosh(0.0381)\cos(0.365) + j \sinh(0.0381)\sin(0.365)) + \big(142{,}155\measuredangle(-5.9º)\big)(\sinh(0.0381)\cos(0.365) + j \cosh(0.0381)\sin(0.365))$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)\big((1.001)(0.9341) + j(0.03811)(0.3569)\big) + \big(142{,}155\measuredangle(-5.9º)\big)\big((0.03811)(0.9341) + j(1.001)(0.3569)\big)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)(0.9348 + j0.0136) + \big(142{,}155\measuredangle(-5.9º)\big)(0.0356 + j0.3572)$$

$$V_S = (115{,}200\measuredangle 0º)(0.9349\measuredangle 0.83º) + \big(142{,}155\measuredangle(-5.9º)\big)(0.359\measuredangle 84.31º)$$

$$V_S = (107{,}700.57\measuredangle 0.83º) + (51{,}030.5\measuredangle 78.4º)$$

$$V_S = 107{,}689.17 + j1{,}567.07 + 10{,}253.43 + j49{,}989.79$$

$$V_S = 117{,}942.6 + j51{,}556.86$$

$$\boldsymbol{V_S = 128{,}718.94\measuredangle 23.61º} \qquad \boldsymbol{Voltios}$$

TEMA 4. (20 puntos) APLICACIÓN: TRANSFORMACIONES EN LINEAS DE TRANSMISION

Para determinar las líneas de equipotenciales de una línea de transmisión ubicada en $y = 60$ *con retorno aterrizado* que corre paralela al plano aterrizado en $y = 30$ se usa la transformación $w = 3600/z$. Determine la imagen del plano $z = x + j30$, y la imagen de la línea en $z = j60$ bajo dicha transformación.

SOLUCION

$$w = \frac{3600}{z} = \frac{3600}{x+jy} \cdot \frac{x-jy}{x-jy} = \frac{3600}{x^2+y^2}(x-jy) \quad Entonces \quad w(x,y) = \frac{3600}{x^2+y^2}(x-jy)$$

Transformación del punto $(0,60)$

$$w(0,60) = \frac{3600}{0+3600}(0-j60) = \boldsymbol{-j60}$$

Transformación de la recta $z = x + j30$. *Despejando z:*

$$z(x,30) = \frac{3600}{w} = \frac{3600}{u+jv} \cdot \frac{u-jv}{u-jv}$$

$$z(x,30) = \frac{3600}{u^2+v^2}(u-jv)$$

$$x = \frac{3600u}{u^2+v^2} \qquad 30 = \frac{-3600v}{u^2+v^2}$$

Tomando la ecuación de la parte imaginaria:

$$30 = \frac{-3600v}{u^2+v^2}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{-3600}{30}v$$

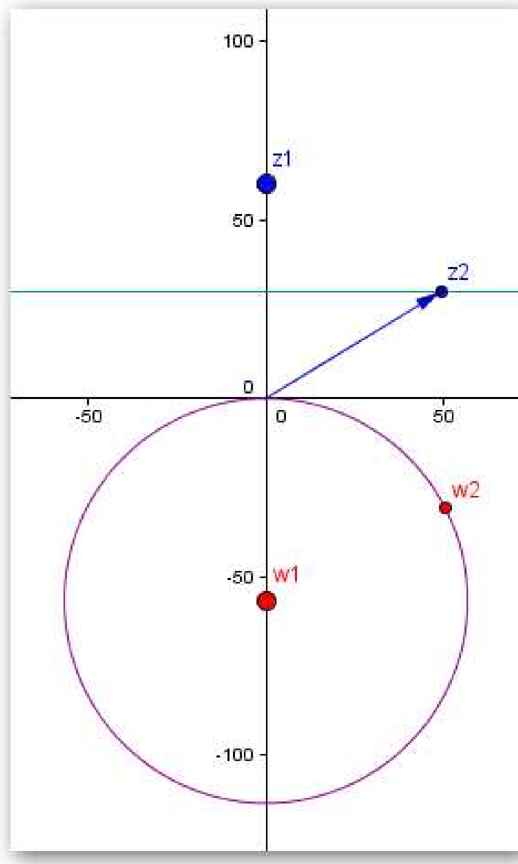
$$u^2 + v^2 = -120v$$

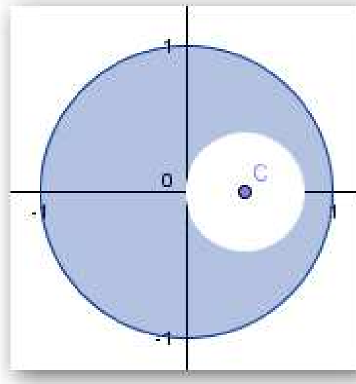
$$u^2 + v^2 + 120v = 0$$

$$u^2 + v^2 + 120v + 3600 = 3600$$

$$\boldsymbol{u^2 + (v+60)^2 = 60^2}$$

Tenemos entonces una circunferencia con centro en $(\boldsymbol{u = 0, v = -60})$ ***y radio de*** $\boldsymbol{60}$.





TEMA 5. (20 puntos) APLICACIÓN: POTENCIAL ELECTROSTATICO

El cable no coaxial cuya sección transversal se muestra en la figura está formado por un cilindro exterior de radio 1 centrado en el origen, y un cilindro interior de radio $2/5$ centrado en $(2/5,0)$

La función que describe el potencial electrostático en cualquier punto (x, y) de la región entre ambos cilindros es la **parte real** de la función compleja:

$$f(z) = \frac{\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)}{\ln 2} + 1$$

d) Determine la función potencial electrostática $U(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$

$$U(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$$
$$f(z) = \frac{\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)}{\ln 2} + 1$$

Recordando que:

$$\ln(z) = \ln\left(re^{j\theta}\right) = \ln(r) + j\theta$$
$$\operatorname{Re}[\ln(z)] = \ln(r) = \ln(|z|)$$

Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right) + 1$$

$$\operatorname{Re}[f(z)] = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left|\frac{2z-1}{z-2}\right|\right) + 1 = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{|2z-1|}{|z-2|}\right) + 1$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{|2x + j2y - 1|}{|x + jy - 2|}\right) + 1$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\sqrt{(2x-1)^2 + 4y^4}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}\right) + 1$$

$$U(x, y) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left(\frac{(2x-1)^2 + 4y^4}{(x-1)^2 + y^2}\right)^{1/2}\right) + 1$$

$$\boldsymbol{U(x, y) = \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(\frac{(2x-1)^2 + 4y^4}{(x-1)^2 + y^2}\right) + 1}$$

e) Determine el valor del potencial en el punto $(1/2, 1/2)$

$$U\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{(2/2-1)^2+4(1/2)^2}{(1/2-2)^2+(1/2)^2}\right)+1$$

$$U\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{1}{5/2}\right)+1$$

$$\boldsymbol{U\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{2}{5}\right)+1}$$

$$\boldsymbol{U\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.339 \qquad Voltios}$$

f) El cilindro interior está a un mismo potencial, determine su potencial.

$$Punto\ \boldsymbol{sobre}\ el\ cilindro\ interior: \qquad (0,0)$$

$$U(0,0) = \frac{1}{2\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{(0-1)^2+4(0)}{(0-2)^2+(0)}\right)+1$$

$$\boldsymbol{U(0,0) = \frac{1}{2\ln 2}\cdot\ln\left(\frac{1}{4}\right)+1}$$

$$\boldsymbol{U(0,0) = 0 \qquad Voltios}$$