Universidad de San Carlos Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería 22/11/11 Matemática Aplicada 2N

Examen Primera Retrasada

Temario **E**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. SOLUCIÓN DE UNA ED UTILIZANDO EL PAR TRANSFORMADO DE FOURIER

La ecuación diferencial que gobierna la corriente $I(t)$ en un circuito serie RL cuando se le aplica una tensión $v(t)$ es

$$Ri(t) + Li'(t) = v(t)$$

Si la tensión aplicada es $v(t) = Ve^{-at}H(t)$, $a > 0$ usando transformada de Fourier y transformada inversa determine la corriente en función del tiempo.

SOLUCION

Aplicando la transformada de Fourier a cada lado de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{F}[Ri(t) + Li'(t)] = \mathcal{F}[Ve^{-at}H(t)]$$

*Aplicando la propiedad de **linealidad** de la transformada de Fourier:*

$$R \cdot \mathcal{F}[i(t)] + L \cdot \mathcal{F}[i'(t)] = V \cdot \mathcal{F}[e^{-at}H(t)]$$

Sea $I(\omega) = \mathcal{F}[i(t)]$

*Aplicando la propiedad de **diferenciación en el tiempo** de la transformada de Fourier:*

$$R \cdot I(\omega) + L \cdot j\omega I(\omega) = V \cdot \mathcal{F}[e^{-at}H(t)]$$

Ahora, determinar la transformada de Fourier, se puede por definición o por formulario:

$$\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}H(t) \cdot e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{(a + j\omega)}$$

Por medio de la definición, utilizamos el escalón unitario de Heaviside que se define como:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(at+j\omega)t}\,dt$$

$$\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = \frac{1}{-(a + j\omega)}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{-(a + j\omega)}(0 - 1)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = \frac{1}{(a + j\omega)}}$$

Sustituyendo la trasformada en la ecuación diferencial:

$$R \cdot I(\omega) + L \cdot j\omega I(\omega) = V \cdot \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$I(\omega)(R + j\omega L) = V \cdot \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$I(\omega)(R/L + j\omega)L = V \cdot \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$\boldsymbol{I(\omega) = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a + j\omega)} \cdot \frac{1}{(R/L + j\omega)}}$$

Separando la expresión en fracciones parciales:

$$I(\omega) = \frac{V}{L} \cdot \left(\frac{1}{(a - R/L)(R/L + j\omega)} - \frac{1}{(a - R/L)(a + j\omega)} \right)$$

$$\boldsymbol{I(\omega) = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a - R/L)} \cdot \left(\frac{1}{(R/L + j\omega)} - \frac{1}{(a + j\omega)} \right)}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a cada lado de la ecuación:

$$\mathcal{F}^{-1}[I(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a - R/L)} \cdot \left(\frac{1}{(R/L + j\omega)} - \frac{1}{(a + j\omega)} \right) \right]$$

Aplicando propiedades:

$$i(t) = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a - R/L)} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(R/L + j\omega)} - \frac{1}{(a + j\omega)} \right]$$

$$i(t) = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a - R/L)} \cdot \left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(R/L + j\omega)} \right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(a + j\omega)} \right] \right)$$

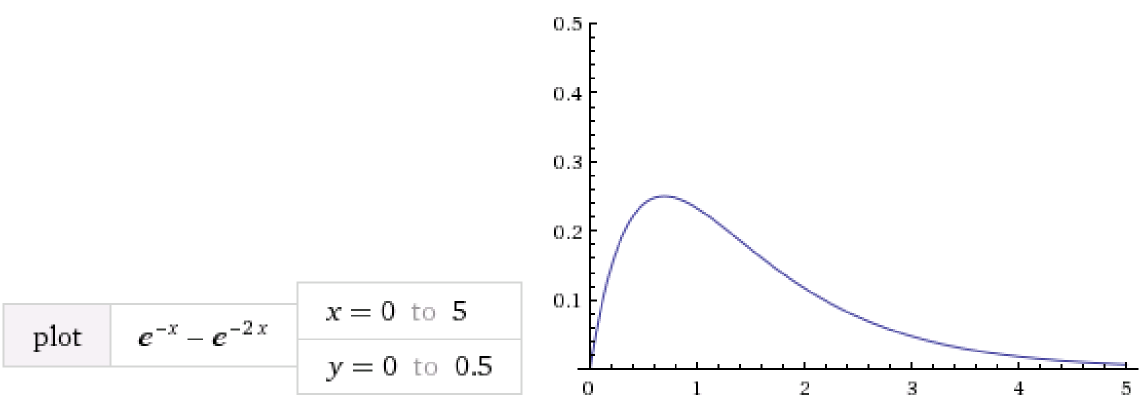
Entonces por formulario:

$$i(t) = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a - R/L)} \cdot \left(e^{-tR/L} H(t) - e^{-at} H(t) \right)$$

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a - R/L)} \cdot \left(e^{-tR/L} - e^{-at} \right) H(t)}$$

Podemos ver que se debe cumplir que $a \neq R/L$ *, para que la expresión sea válida.*

La gráfica para $V = R = L = 1$ *&* $a = 2$ *es;*



TEMA 2. SERIE COMPLEJA DE FOURIER

Calcule la serie compleja de Fourier de la tensión rectificada y dibuje su espectro de fase,

$$v(\omega t) = \cos(\omega t)\,, \quad volts \quad -\pi/6 < \omega t < \pi/6$$

SOLUCIÓN

Período: $T = 2\pi$

$$v(\omega t) = \begin{cases} \cos(\omega t)\,, & -\pi/6 < \omega t < \pi/6 \\ 0, & -\pi < \omega t < -\pi/6 \\ & \pi/6 < \omega t < \pi \end{cases}$$

La serie compleja de Fourier:

$$v(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \cdot e^{jn\omega t}$$

Coeficientes complejos:

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\omega t)\cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t$$

$$V_n = 0 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos(\omega t)\cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t + 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)\cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t$$

$$V_n = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{j\omega t}e^{-jn\omega t}\, d\omega t + \int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{-j\omega t}e^{-jn\omega t}\, d\omega t\right]$$

$$V_n = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{j(1-n)\omega t}\, d\omega t + \int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{-j(1+n)\omega t}\, d\omega t\right]$$

$$V_n = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{j(1-n)}\left[e^{j(1-n)\omega t}\right]_{\omega t=-\pi/6}^{\pi/6} + \frac{1}{-j(1+n)}\left[e^{-j(1+n)\omega t}\right]_{\omega t=-\pi/6}^{\pi/6}\right]$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\left(e^{j(1-n)\pi/6} - e^{-j(1-n)\pi/6}\right)}{j(1-n)} + \frac{\left(e^{-j(1+n)\pi/6} - e^{j(1+n)\pi/6}\right)}{-j(1+n)}\right]}$$

$$V_n = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{(1-n)}\cdot\frac{\left(e^{j(1-n)\pi/6} - e^{-j(1-n)\pi/6}\right)}{2j} + \frac{2}{(1+n)}\frac{\left(e^{j(1+n)\pi/6} - e^{-j(1+n)\pi/6}\right)}{2j}\right]$$

$$V_n = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{(1-n)}\cdot\sin\big((1-n)\pi/6\big) + \frac{2}{(1+n)}\cdot\sin\big((1+n)\pi/6\big)\right]$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\big((1-n)\pi/6\big)}{(1-n)} + \frac{\sin\big((1+n)\pi/6\big)}{(1+n)}\right]}$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\left[\pi/6\cdot\frac{\sin\big((1-n)\pi/6\big)}{(1-n)\pi/6} + \pi/6\cdot\frac{\sin\big((1+n)\pi/6\big)}{(1+n)\pi/6}\right]$$

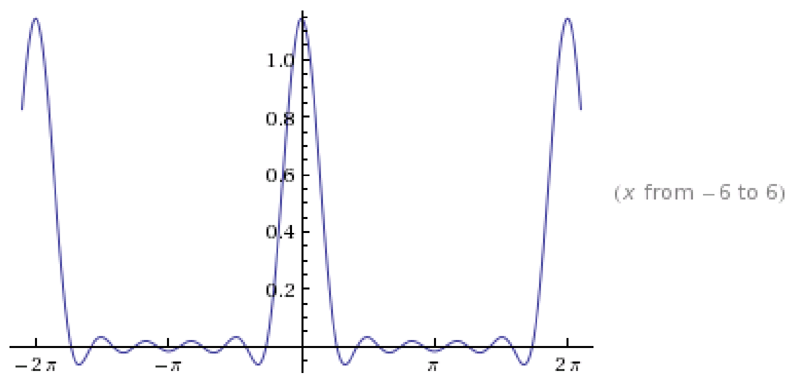
Sustituyendo la forma: $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ $\quad con\ la\ propiedad$: $\operatorname{sinc} 0 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{12}\left[\operatorname{sinc}\big((1-n)\pi/6\big) + \operatorname{sinc}\big((1+n)\pi/6\big)\right]}$$

La serie compleja queda:

$$\boldsymbol{v(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{12}\left[\mathrm{sinc}\big((1-n)\pi/6\big) + \mathrm{sinc}\big((1+n)\pi/6\big)\right] \cdot e^{jn\omega t}}$$

Para verificar, su grafica para $-5 < n < 5$ *es:*

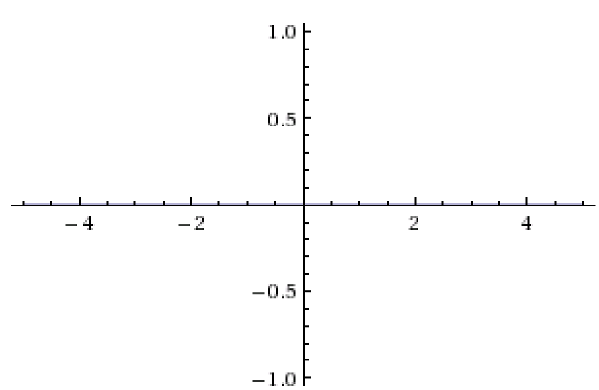


Graficar el espectro de fase,

Los valores de coeficientes:

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
V_n	$\frac{\sqrt{3}}{16\pi}$	$\frac{13}{60\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}$	$\frac{5}{12\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{8\pi}+\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{8\pi}+\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}$	$\frac{13}{60\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{16\pi}$
$\measuredangle\theta$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Se observa que todos los coeficientes son valores reales positivos, por lo que el valor de fase de cada uno es cero:



TEMA 3. DEMOSTRACIÓN DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

a) Calcule la transformada de Fourier de

$$f(t) = e^{-bt}\,cos(\omega_0 t)\,H(t)$$

b) Muestre que

$$\mathcal{F}[cos(\omega_0 t)\,H(t)] = \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

Ayuda. Use la fórmula de $\mathcal{F}[H(t)]$ y la definición con integral impropia de esta transformada.

SOLUCIÓN

a)

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[e^{-bt}\,cos(\omega_0 t)\,H(t)] = \mathcal{F}\left[e^{-bt}\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)H(t)\right]$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-bt}e^{j\omega_0 t}H(t) + e^{-bt}e^{-j\omega_0 t}H(t)\right]$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\left(e^{-bt}H(t)\right)\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\left(e^{-bt}H(t)\right)\right]$$

Siendo la transformada de Fourier de $e^{-bt}H(t)$ *, por formulario:*

$$\mathcal{F}[e^{-bt}H(t)] = \frac{1}{b + j\omega}$$

Y utilizando la propiedad de ***Traslación en la Frecuencia*** *de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\cdot f(t)\right] = F(\omega)_{\omega\to\omega-\omega_0} = F(\omega - \omega_0)$$

Entonces:

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-bt}H(t)]_{\omega\to\omega-\omega_0} + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-bt}H(t)]_{\omega\to\omega+\omega_0}$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b + j\omega}\right]_{\omega\to\omega-\omega_0} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b + j\omega}\right]_{\omega\to\omega+\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b + j(\omega - \omega_0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b + j(\omega + \omega_0)}\right)}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{b + j(\omega + \omega_0)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b + j(\omega + \omega_0) + b + j(\omega - \omega_0)}{\left(b + j(\omega - \omega_0)\right)\left(b + j(\omega + \omega_0)\right)}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{2b + j(\omega + \omega_0 + \omega - \omega_0)}{b^2 + jb(\omega + \omega_0) + jb(\omega - \omega_0) + j^2(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{2b + j2\omega}{b^2 + jb(\omega + \omega_0 + \omega - \omega_0) + j^2(\omega^2 - \omega_0^2)}\right) = \frac{2}{2}\left(\frac{b + j\omega}{b^2 + j2b\omega + j^2\omega^2 - j^2\omega_0^2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{b + j\omega}{(b^2 + j2b\omega + j^2\omega^2) + \omega_0^2} = \frac{b + j\omega}{(b + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = \mathcal{F}\left[e^{-bt}\,cos(\omega_0 t)\,H(t)\right] = \frac{b + j\omega}{(b + j\omega)^2 + \omega_0^2}}$$

b)

Demostración, utilizando el par transformado del escalón unitario y definición por integral impropia.

Tenemos que el escalón unitario de Heaviside se define como: $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

Utilizando la tabla de transformadas, encontramos el par transformado de Fourier:

$$\mathcal{F}[H(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

Entonces tenemos que:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} H(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{H(t)e^{i\omega_0 t}}{2} + \frac{H(t)e^{-i\omega_0 t}}{2}\right\}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)e^{i\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)e^{-i\omega_0 t}\}$$

Por la ***definición de transformada de Fourier****:*

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-i(\omega+\omega_0)t}\, dt$$

Sustituyendo: $x = \omega - \omega_0 \quad , \quad y = \omega + \omega_0$

Tenemos la transformada de Fourier del escalón unitario, por la integral impropia:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-ixt}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-iyt}\, dt$$

Sustituyendo la transformada de Fourier del escalón unitario, por formula:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(x) + \frac{1}{ix}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi\delta(y) + \frac{1}{iy}\right)$$

Regresando a la variable original:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{i(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{i(\omega+\omega_0)}\right)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega-\omega_0)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega+\omega_0)}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{\omega+\omega_0+\omega-\omega_0}{2i(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{2\omega}{2i(\omega^2-\omega_0^2)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{i\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]}$$

TEMA 4. ECUACIÓN DIFERENCIAL CON SERIES DE FOURIER

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - y = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

SOLUCIÓN

Resolviendo la ecuación diferencial en estado permanente, utilizamos el método de coeficientes indeterminados, suponiendo que la solución posee la forma:

$$y(t) = A + \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{j(2m-1)t}$$

La primera derivada de la carga respecto al tiempo:

$$y'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot j(2m-1) \cdot e^{j(2m-1)t}$$

La segunda derivada de la carga respecto al tiempo:

$$y''(t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot j^2(2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t} = \sum_{m=1}^{\infty} -B_m \cdot (2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y'' - y = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} -B_m \cdot (2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t} - \left(A + \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{j(2m-1)t} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} -B_m \cdot (2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t} - A - \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{j(2m-1)t} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

$$-A + \sum_{m=1}^{\infty} -B_m((2m-1)^2 + 1)e^{j(2m-1)t} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

Comparando términos semejantes, obtenemos las ecuaciones:

$$-A = \frac{1}{2} \qquad -B_m((2m-1)^2 + 1) = \frac{1}{\pi(2m-1)}$$

$$A = -\frac{1}{2} \qquad B_m = \frac{-1}{\pi(2m-1)((2m-1)^2 + 1)}$$

Sustituyendo los Coeficientes A y B_m en la expresión de la solución supuesta:

$$\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{\pi(2m-1)((2m-1)^2 + 1)} \cdot e^{j(2m-1)t}}$$

Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *22/11/11* *Matemática Aplicada 2N*

Examen Primera Retrasada

Temario **O**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. SOLUCIÓN DE UNA ED UTILIZANDO EL PAR TRANSFORMADO DE FOURIER

Usando transformada de Fourier y transformada inversa determine la solución de la ecuación diferencial

$$Ly'(t) + Ry(t) = Ve^{-at}H(t)$$

SOLUCIÓN

Aplicando la transformada de Fourier a cada lado de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{F}[Ry(t) + Ly'(t)] = \mathcal{F}[Ve^{-at}H(t)]$$

Aplicando la propiedad de ***linealidad*** *de la transformada de Fourier:*

$$R \cdot \mathcal{F}[y(t)] + L \cdot \mathcal{F}[y'(t)] = V \cdot \mathcal{F}[e^{-at}H(t)]$$

Sea $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$

Aplicando la propiedad de ***diferenciación en el tiempo*** *de la transformada de Fourier:*

$$R \cdot Y(\omega) + L \cdot j\omega Y(\omega) = V \cdot \mathcal{F}[e^{-at}H(t)]$$

Ahora, determinar la transformada de Fourier, se puede por definición o por formulario:

$$\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}H(t) \cdot e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{(a + j\omega)}$$

Por medio de la definición, utilizamos el escalón unitario de Heaviside que se define como:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(at+j\omega)t}\,dt$$

$$\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = \frac{1}{-(a + j\omega)}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{-(a + j\omega)}(0 - 1)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = \frac{1}{(a + j\omega)}}$$

Sustituyendo la trasformada en la ecuación diferencial:

$$R \cdot Y(\omega) + L \cdot j\omega Y(\omega) = V \cdot \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$Y(\omega)(R + j\omega L) = V \cdot \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$Y(\omega)(R/L + j\omega)L = V \cdot \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$\boldsymbol{Y(\omega) = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{(a + j\omega)} \cdot \frac{1}{(R/L + j\omega)}}$$

Separando la expresión en fracciones parciales:

$$Y(\omega)=\frac{V}{L}\cdot\left(\frac{1}{(a-R/L)(R/L+j\omega)}-\frac{1}{(a-R/L)(a+j\omega)}\right)$$

$$\boldsymbol{Y(\omega)=\frac{V}{L}\cdot\frac{1}{(a-R/L)}\cdot\left(\frac{1}{(R/L+j\omega)}-\frac{1}{(a+j\omega)}\right)}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a cada lado de la ecuación:

$$\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{V}{L}\cdot\frac{1}{(a-R/L)}\cdot\left(\frac{1}{(R/L+j\omega)}-\frac{1}{(a+j\omega)}\right)\right]$$

Aplicando propiedades:

$$y(t)=\frac{V}{L}\cdot\frac{1}{(a-R/L)}\cdot\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(R/L+j\omega)}-\frac{1}{(a+j\omega)}\right]$$

$$y(t)=\frac{V}{L}\cdot\frac{1}{(a-R/L)}\cdot\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(R/L+j\omega)}\right]-\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(a+j\omega)}\right]\right)$$

Entonces por formulario:

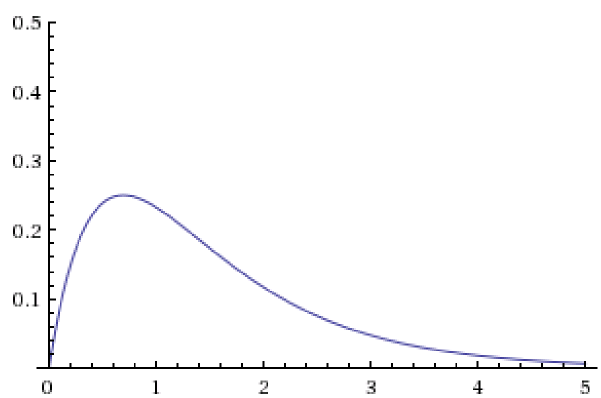
$$y(t)=\frac{V}{L}\cdot\frac{1}{(a-R/L)}\cdot\left(e^{-tR/L}H(t)-e^{-at}H(t)\right)$$

$$\boldsymbol{y(t)=\frac{V}{L}\cdot\frac{1}{(a-R/L)}\cdot\left(e^{-tR/L}-e^{-at}\right)H(t)}$$

Podemos ver que se debe cumplir que $a\neq R/L$ *, para que la expresión sea válida.*

La gráfica para $V=R=L=1\ \ \&\ \ a=2$ *es;*

plot	$e^{-x}-e^{-2x}$	$x=0$ to 5 $y=0$ to 0.5

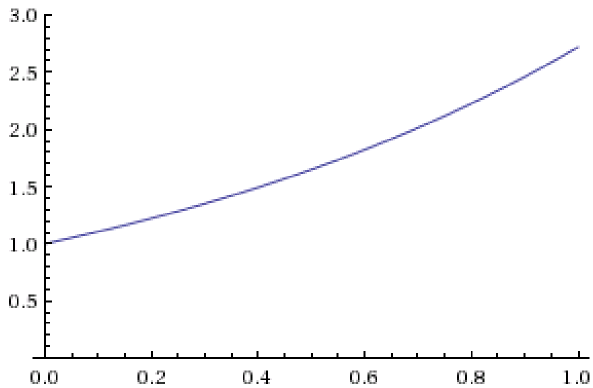


TEMA 2. SERIE COMPLEJA DE FOURIER

Calcule la serie compleja de Fourier de la función y dibuje su espectro de fase,

$$f(t) = e^{kt} \quad , \quad 0 < t < a$$

SOLUCIÓN



Período: $T = a$

Frecuencia fundamental: $\omega_0 = 2\pi/a$

La serie compleja de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Coeficientes complejos:

$$V_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$V_n = \frac{1}{a}\int_0^a e^{kt} \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{a}\int_0^a e^{(k-jn\omega_0)t}\, dt$$

$$V_n = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k - jn\omega_0}\left[e^{(k-jn\omega_0)t}\right]_{t=0}^{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k - jn2\pi/a}\left[e^{(k-jn2\pi/a)a} - 1\right]$$

$$V_n = \frac{1}{ak - jn2\pi}\left[e^{ak-jn2\pi} - 1\right] = \frac{1}{ak - jn2\pi}\left[e^{ak}e^{-jn2\pi} - 1\right]$$

$$V_n = \frac{1}{ak - jn2\pi}\left[e^{ak-jn2\pi} - 1\right] = \frac{1}{ak - jn2\pi}\left[e^{ak}e^{-jn2\pi} - 1\right]$$

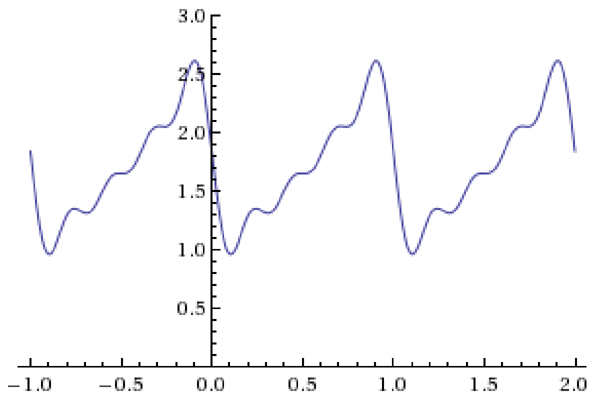
$$V_n = \frac{1}{ak - jn2\pi}\left[e^{ak}(1) - 1\right]$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{ak - j2\pi n}\left[e^{ak} - 1\right]}$$

La serie compleja queda:

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{ak - j2\pi n}\left[e^{ak} - 1\right] \cdot e^{j\frac{2\pi n}{a}t}}$$

Para verificar, suponiendo que $a = k = 1$ *, la grafica para* $-4 < n < 4$ *es:*



Graficar el espectro de fase, para ello se debe expresar el coeficiente V_n *con magnitud y fase*

$$V_n = \frac{1}{ak - j2\pi n}[e^{ak} - 1] = [e^{ak} - 1]\frac{1}{ak - j2\pi n} \cdot \frac{ak + j2\pi n}{ak + j2\pi n}$$

$$V_n = [e^{ak} - 1]\frac{ak + j2\pi n}{(ak - j2\pi n)(ak + j2\pi n)} = [e^{ak} - 1]\frac{ak + j2\pi n}{(a^2k^2 + 4\pi^2 n^2)}$$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{[e^{ak} - 1]}{(a^2k^2 + 4\pi^2 n^2)} \cdot (ak + j2\pi n)}$$

La magnitud:

$$\boldsymbol{V_n = \frac{[e^{ak} - 1]}{(a^2k^2 + 4\pi^2 n^2)} \cdot \sqrt{a^2k^2 + 4\pi^2 n^2}}$$

La fase:

$$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi n}{ak}\right)}$$

Se observa que los valores de fase dependen del valor del producto de ak

TEMA 3. DEMOSTRACIÓN DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

a) Calcule la transformada de Fourier de

$$f(t) = e^{-bt}\, cos(\omega_0 t)\, H(t)$$

b) Muestre que

$$\mathcal{F}[cos(\omega_0 t)\, H(t)] = \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

Ayuda. Use la fórmula de $\mathcal{F}[H(t)]$ y la definición con integral impropia de esta transformada.

SOLUCIÓN

a)

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[e^{-bt}\, cos(\omega_0 t)\, H(t)] = \mathcal{F}\left[e^{-bt}\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)H(t)\right]$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-bt}e^{j\omega_0 t}H(t) + e^{-bt}e^{-j\omega_0 t}H(t)\right]$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\left(e^{-bt}H(t)\right)\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-j\omega_0 t}\left(e^{-bt}H(t)\right)\right]$$

Siendo la transformada de Fourier de $e^{-bt}H(t)$ *, por formulario:*

$$\mathcal{F}[e^{-bt}H(t)] = \frac{1}{b + j\omega}$$

Y utilizando la propiedad de ***Traslación en la Frecuencia*** *de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t} \cdot f(t)\right] = F(\omega)_{\omega \to \omega - \omega_0} = F(\omega - \omega_0)$$

Entonces:

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-bt}H(t)]_{\omega \to \omega - \omega_0} + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-bt}H(t)]_{\omega \to \omega + \omega_0}$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b + j\omega}\right]_{\omega \to \omega - \omega_0} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b + j\omega}\right]_{\omega \to \omega + \omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b + j(\omega - \omega_0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b + j(\omega + \omega_0)}\right)}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{b + j(\omega + \omega_0)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b + j(\omega + \omega_0) + b + j(\omega - \omega_0)}{\left(b + j(\omega - \omega_0)\right)\left(b + j(\omega + \omega_0)\right)}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{2b + j(\omega + \omega_0 + \omega - \omega_0)}{b^2 + jb(\omega + \omega_0) + jb(\omega - \omega_0) + j^2(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{2b + j2\omega}{b^2 + jb(\omega + \omega_0 + \omega - \omega_0) + j^2(\omega^2 - \omega_0^2)}\right) = \frac{2}{2}\left(\frac{b + j\omega}{b^2 + j2b\omega + j^2\omega^2 - j^2\omega_0^2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{b + j\omega}{(b^2 + j2b\omega + j^2\omega^2) + \omega_0^2} = \frac{b + j\omega}{(b + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = \mathcal{F}\left[e^{-bt}\, cos(\omega_0 t)\, H(t)\right] = \frac{b + j\omega}{(b + j\omega)^2 + \omega_0^2}}$$

b)

Demostración, utilizando el par transformado del escalón unitario y definición por integral impropia.

Tenemos que el escalón unitario de Heaviside se define como: $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

Utilizando la tabla de transformadas, encontramos el par transformado de Fourier:

$$\mathcal{F}[H(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

Entonces tenemos que:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} H(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{H(t)e^{i\omega_0 t}}{2} + \frac{H(t)e^{-i\omega_0 t}}{2}\right\}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)e^{i\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)e^{-i\omega_0 t}\}$$

*Por la **definición de transformada de Fourier**:*

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-i(\omega+\omega_0)t}\, dt$$

Sustituyendo: $x = \omega - \omega_0 \quad , \quad y = \omega + \omega_0$

Tenemos la transformada de Fourier del escalón unitario, por la integral impropia:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-ixt}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-iyt}\, dt$$

Sustituyendo la transformada de Fourier del escalón unitario, por formula:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(x) + \frac{1}{ix}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi\delta(y) + \frac{1}{iy}\right)$$

Regresando a la variable original:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{i(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{i(\omega+\omega_0)}\right)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega-\omega_0)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega+\omega_0)}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{\omega+\omega_0+\omega-\omega_0}{2i(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{2\omega}{2i(\omega^2-\omega_0^2)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{i\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]}$$

TEMA 4. ECUACIÓN DIFERENCIAL CON SERIES DE FOURIER

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - y = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

SOLUCIÓN

Resolviendo la ecuación diferencial en estado permanente, utilizamos el método de coeficientes indeterminados, suponiendo que la solución posee la forma:

$$y(t) = A + \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{j(2m-1)t}$$

La primera derivada de la carga respecto al tiempo:

$$y'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot j(2m-1) \cdot e^{j(2m-1)t}$$

La segunda derivada de la carga respecto al tiempo:

$$y''(t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot j^2(2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t} = \sum_{m=1}^{\infty} -B_m \cdot (2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y'' - y = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} -B_m \cdot (2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t} - \left(A + \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{j(2m-1)t}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} -B_m \cdot (2m-1)^2 \cdot e^{j(2m-1)t} - A - \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{j(2m-1)t} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

$$-A + \sum_{m=1}^{\infty} -B_m((2m-1)^2+1)e^{j(2m-1)t} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j(2m-1)t}}{\pi(2m-1)}$$

Comparando términos semejantes, obtenemos las ecuaciones:

$$-A = \frac{1}{2} \qquad -B_m((2m-1)^2+1) = \frac{1}{\pi(2m-1)}$$

$$A = -\frac{1}{2} \qquad B_m = \frac{-1}{\pi(2m-1)((2m-1)^2+1)}$$

Sustituyendo los Coeficientes A y B_m en la expresión de la solución supuesta:

$$\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{\pi(2m-1)((2m-1)^2+1)} \cdot e^{j(2m-1)t}}$$