Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *23/11/11* *Matemática Aplicada 5N*

Examen Primera Retrasada

Temario **A**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. **INTEGRALES COMPLEJAS**

Calcule cada una de las integrales (deje procedimiento a mano)

$$a)\ \int_{-a}^{a} \omega t e^{i\omega t}\, dt\ , \qquad b)\ \int_C (\bar{z}+i)\, dz\ , \qquad C: y = x^2\ \ de\ \ (0,0)\ y\ (2,4)$$

$$c)\ \int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} z\cos(z^2)\, dz\ , \qquad d)\ \oint_C \left(i + \frac{1}{z^3}\right) dz\ , \qquad \begin{gathered} C: circunferencia\ |z| = r > 0 \\ (separe\ en\ dos\ integrales\ y\ use\ polares) \end{gathered}$$

SOLUCIÓN

a)

$$\int_{-a}^{a} \omega t\, e^{i\omega t}\, dt = \omega \int_{-a}^{a} t\, e^{i\omega t}\, dt$$

Integración por partes:

$$\int_a^b u\, dv = [uv]_{t=a}^{b} - \int_a^b v\, du \qquad \begin{gathered} u = t \\ du = dt \end{gathered} \qquad \begin{gathered} dv = e^{i\omega t} dt \\ v = e^{i\omega t}/i\omega \end{gathered}$$

Entonces:

$$\int_{-a}^{a} \omega t\, e^{i\omega t}\, dt = \omega\left(\left[\frac{te^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{t=-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} dt\right) = \omega\left(\frac{1}{i\omega}\left[ae^{i\omega a} + ae^{-i\omega a}\right] - \left[\frac{e^{i\omega t}}{i^2\omega^2}\right]_{t=-a}^{a}\right)$$

$$\int_{-a}^{a} \omega t\, e^{i\omega t}\, dt = \omega\left(\frac{2a}{i\omega}\left[\frac{e^{i\omega a} + e^{-i\omega a}}{2}\right] - \frac{1}{(-1)\omega^2}\left[e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right]\right)$$

$$\int_{-a}^{a} \omega t\, e^{i\omega t}\, dt = \omega\left(\frac{2a}{i\omega}\cos(\omega a) + \frac{2i}{\omega^2}\left[\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i}\right]\right) = \omega\left(\frac{2a}{i\omega}\cos(\omega a) + \frac{2i}{\omega^2}\sin(\omega a)\right)$$

$$\int_{-a}^{a} \omega t\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{2i}{\omega}\sin(\omega a) - 2ai\cos(\omega a)$$

$$\boldsymbol{\int_{-a}^{a} \omega t\, e^{i\omega t}\, dt = i \cdot \left(\frac{2}{\omega}\sin(\omega a) - 2a\cos(\omega a)\right)}$$

b)

$$\int_C (\bar{z}+i)\, dz = \int_C xdx - (1-y)dy + i\int_C (1-y)dx + xdy$$

$$y = x^2\quad ,\quad dy = 2xdx\quad ,\quad para\ 0 \le x \le 2$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,4)} (\bar{z}+i)\, dz = \int_{x=0}^{2} xdx - (1-x^2)2xdx + i\int_{x=0}^{2} (1-x^2)dx + x(2x)dx$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,4)} (\bar{z}+i)\, dz = \int_{x=0}^{2} (x - 2x + 2x^3)\, dx + i\int_{x=0}^{2} (1 - x^2 + 2x^2)\, dx$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,4)} (\overline{z}+i)\,dz = \int_{x=0}^{2} (-x+2x^3)\,dx + i\int_{x=0}^{2} (1+x^2)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^4}{4}\right]_0^2 + i\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,4)} (\overline{z}+i)\,dz = \left[-\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{2}-0\right] + i\left[2+\frac{2^3}{3}-0\right] = 6+i\frac{14}{3}$$

$$\boldsymbol{\int_{(0,0)}^{(2,4)} (\overline{z}+i)\,dz = 6+i\frac{14}{3}}$$

c)

$$\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} z\cos(z^2)\,dz = \int_{z=1-\pi i}^{2+3\pi i} \frac{\cos(x)}{2}\,dx \qquad \begin{gathered} x = z^2 \\ dx = 2zdz \end{gathered}$$

$$\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} z\cos(z^2)\,dz = \frac{1}{2}\int_{z=1-\pi i}^{2+3\pi i} \cos(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin(x)\right]_{x=z^2} = \left[\frac{1}{2}\sin(z^2)\right]_{z=1-\pi i}^{2+3\pi i}$$

$$\boldsymbol{\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} z\cos(z^2)\,dz = \frac{1}{2}\sin((2+3\pi i)^2) - \frac{1}{2}\sin((1-\pi i)^2)}$$

$$\boldsymbol{\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} z\cos(z^2)\,dz = \frac{1}{2}\sin(4-9\pi^2+12\pi i) - \frac{1}{2}\sin(1-\pi^2-2\pi i)}$$

Utilizando la identidad: $\sin(z) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

$$\boldsymbol{\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} z\cos(z^2)\,dz = 2.026\cdot 10^{13} - i5.894\cdot 10^{15}}$$

d)

$$\oint_C \left(i+\frac{1}{z^3}\right)dz\ , \qquad \begin{gathered} C: circunferencia\ |z| = r > 0 \\ (separe\ en\ dos\ integrales\ y\ use\ polares) \end{gathered}$$

$$\oint_C \left(i+\frac{1}{z^3}\right)dz = \oint_C (i)\,dz + \oint_C \frac{1}{z^3}dz \qquad En\ polares\ \ z = re^{j\theta}$$

Un punto sobre la circunferencia $|z| = r$ *esta expresado como:* $z = re^{j\theta}$

Sustituyendo con:

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad dz = ire^{i\theta}d\theta \quad , \quad para\ 0 \le \theta < 2\pi$$

Entonces:

$$\oint_{|z|=r} \left(i+\frac{1}{z^3}\right)dz = i\int_{\theta=0}^{2\pi} ire^{i\theta}\,d\theta + \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^3e^{i3\theta}}d\theta = -r\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i\theta}\,d\theta + \frac{i}{r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-i2\theta}\,d\theta$$

$$\oint_{|z|=r} \left(i+\frac{1}{z^3}\right)dz = -\frac{r}{i}\left[e^{i\theta}\right]_{\theta=0}^{2\pi} + \frac{i}{-i2r^2}\left[e^{-i2\theta}\right]_{\theta=0}^{2\pi} = -\frac{r}{i}\left(e^{i2\pi}-1\right) + \frac{i}{-i2r^2}\left(e^{-i4\pi}-1\right)$$

$$\oint_{|z|=r} \left(i+\frac{1}{z^3}\right)dz = -\frac{r}{i}(1-1) + \frac{i}{-i2r^2}(1-1) = 0+0$$

$$\boldsymbol{\oint_{|z|=r} \left(i+\frac{1}{z^3}\right)dz = 0}$$

TEMA 2. TRANSFORMACIONES COMPLEJAS

a) Determine las imágenes de la recta $x = \pi/3$, y el segmento $y = 1$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ bajo la función: $w = \sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

b) Determine y dibuje la imagen de la región limitada por $1 \leq r \leq 2$ y $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ bajo la función: $w = -\overline{\log(z)} + i$ (opere con logaritmo natural y tome el conjugado)

SOLUCIÓN

a)

Transformación de la recta $x = \pi/3$: $x = \pi/3$, $z_1 = \pi/3 + iy$, $-\infty \leq y < \infty$

$$w_1 = \sin(z_1) = \sin(\pi/3 + iy) = \sin(\pi/3)\cosh y + i\cos(\pi/3)\sinh y$$

$$\boldsymbol{w_1(\pi/3, y) = \left(\sqrt{3}/2\right)\cosh y + i(1/2)\sinh y \quad , \quad u = \left(\sqrt{3}/2\right)\cosh y \quad , \quad v = (1/2)\sinh y}$$

Dado que:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

$$\left(2/\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{3}/2\right)^2 \cosh^2 y - 2^2 \cdot (1/2)^2 \sinh^2 y = 1$$

Sustituyendo:

$$\frac{4}{3}u^2 - 4v^2 = 1 \quad ==> \quad \boldsymbol{\frac{u^2}{3/4} - \frac{v^2}{1/4} = 1}$$

Tenemos la ecuación de una ***HIPERBOLA.***

Transformación de la segmento de recta: $y = 1$, $z_2 = x + i$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

$$w_2 = \sin(z_2) = \sin(x + i) = \sin x \cosh 1 + i \cos x \sinh 1$$

$$\boldsymbol{w_2(x, 1) = \sin x \cosh 1 + i \cos x \sinh 1 \quad , \quad u = \sin x \cosh 1 \quad , \quad v = \cos x \sinh 1}$$

Dado que:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

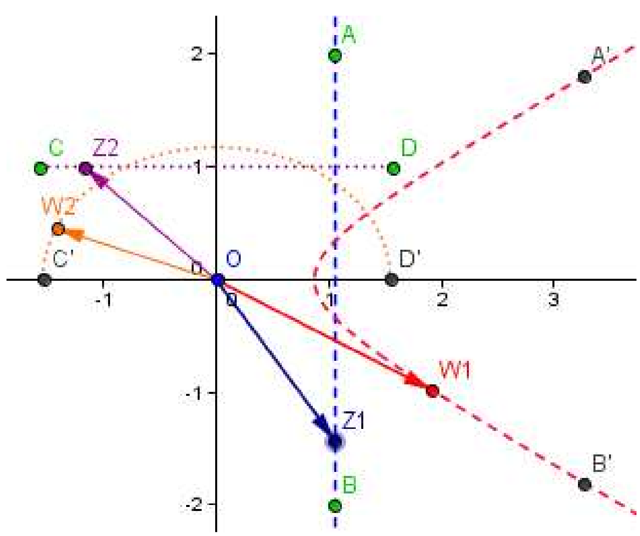
$$(\sinh^2 1 \,/\, \sinh^2 1)\cos^2 x + (\cosh^2 1 \,/\, \cosh^2 1)\sin^2 x = 1$$

Sustituyendo:

$$\frac{v^2}{\sinh^2 1} + \frac{u^2}{\cosh^2 1} = 1 \quad ==> \quad \boldsymbol{\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1}$$

Tenemos la ecuación de una ***ELIPSE****, cuyo segmento se define entre los puntos:*

$$\boldsymbol{w_2(-\pi/2, 1) = -\cosh 1 = -1.543} \qquad \boldsymbol{w_2(\pi/2, 1) = \cosh 1 = 1.543}$$



b)

$$w = -\overline{\ln(z)} + i = -\overline{\ln(re^{i\theta})} + i = -\left(\overline{\ln(r) + i\theta}\right) + i = -(\ln(r) - i\theta) + i$$
$$\boldsymbol{w = -\ln(r) + i(\theta + 1)}$$

$$1 \le r \le 2$$
$$\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$$

Ecuaciones de los segmentos transformados:

$$w(1,\theta) = -\ln 1 + i(\theta + 1)$$
$$w(1,\theta) = 0 + i(\theta + 1)$$
$$\boldsymbol{u = 0 \qquad v = \theta + 1}$$

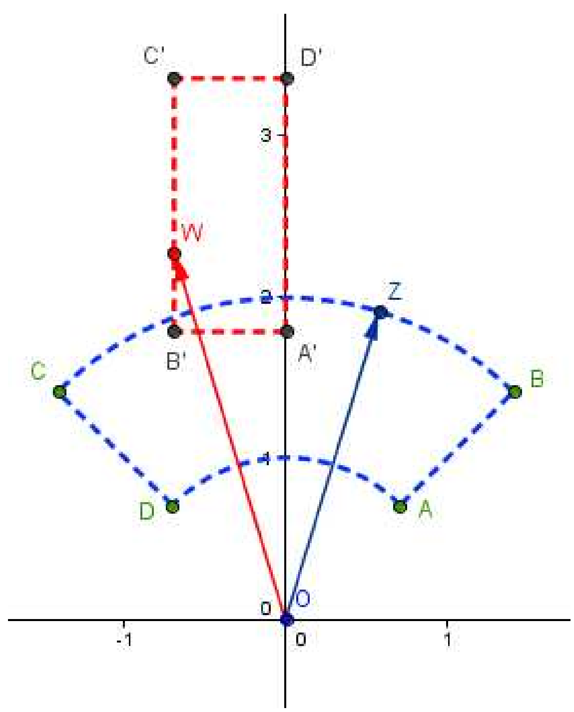
$$w(2,\theta) = -\ln 2 + i(\theta + 1)$$
$$\boldsymbol{u = -\ln 2 = -0.693 \qquad v = \theta + 1}$$

$$w(r,\pi/4) = -\ln r + i(\pi/4 + 1)$$
$$\boldsymbol{u = -\ln r \qquad v = \pi/4 + 1 = 1.785}$$

$$w(r,3\pi/4) = -\ln r + i(3\pi/4 + 1)$$
$$\boldsymbol{u = -\ln r \qquad v = 3\pi/4 + 1 = 3.356}$$

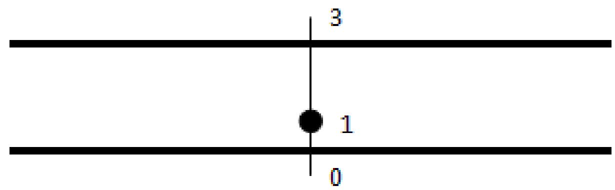
Puntos transformados:

$$\boldsymbol{w(1,\pi/4) = i(\pi/4 + 1) \quad w(1,3\pi/4) = i(3\pi/4 + 1)}$$
$$\boldsymbol{w(2,\pi/4) = -\ln 2 + i(\pi/4 + 1) \quad w(2,3\pi/4) = -\ln 2 + i(3\pi/4 + 1)}$$



TEMA 3. FUNCIONES COMPLEJAS

a) Un capacitor está conformado por dos placas paralelas horizontales distanciadas 3 unidades a potencial cero y un conductor que corre paralela a ellas distanciada 1 unidad de una.



El potencial electrostático complejo en su interior está dado por

$$f(z) = 2Q\log\left(\frac{e^{\pi z/3} - e^{-\pi/3}}{e^{\pi z/3} - e^{\pi/3}}\right)$$

Determine la intensidad de campo eléctrico E.

b) Determine si la función dada es armónica en su dominio apropiado, determine su armónica conjugada y encuentre su función analítica correspondiente, si lo es y existen.

$$u = e^{x}(x\cos y - y\sin y)$$

SOLUCIÓN

a)

El campo eléctrico estático complejo se determina como:

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-f'(z)}$$

$$\mathbf{E}(z) = -\overline{\frac{d}{dz}\left[2Q\ln\left(\frac{e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3}}{e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3}}\right)\right]} = -2Q\,\overline{\frac{d}{dz}\left[\ln\left(\frac{e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3}}{e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3}}\right)\right]}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\,\overline{\left[\frac{e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3}}{e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3}} \cdot \frac{(e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3})(\pi/3)e^{\pi z/3} - (e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3})(\pi/3)e^{\pi z/3}}{(e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3})^2}\right]}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\,\overline{\left[\frac{(\pi/3)e^{\pi z/3}}{e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3}} \cdot \frac{(e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3}) - (e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3})}{e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3}}\right]}$$

$$\boldsymbol{\mathbf{E}(z) = -2Q\,\overline{\left[\frac{e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3} - e^{\pi z/3} + e^{-i\pi/3}}{(e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3})(e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3})}\right](\pi/3)e^{\pi z/3}}}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\,\overline{\left[\frac{-e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{e^{2\pi z/3} - e^{i\pi/3}e^{\pi z/3} - e^{-i\pi/3}e^{\pi z/3} + 1}\right](\pi/3)e^{\pi z/3}}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\,\overline{\left[\frac{-e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{(e^{\pi z/3} - e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3} + e^{-\pi z/3})e^{\pi z/3}}\right](\pi/3)e^{\pi z/3}}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\,\overline{\left[\frac{-e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3}}{(e^{\pi z/3}-e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}+e^{-\pi z/3})}\right](\pi/3)\,\frac{e^{\pi z/3}}{e^{\pi z/3}}}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q(\pi/3)\,\overline{\left[\frac{-(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3})}{(e^{\pi z/3}+e^{-\pi z/3})-(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3})}\right]}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q(\pi/3)\,\overline{\left[\frac{-i(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3})/2i}{(e^{\pi z/3}+e^{-\pi z/3})/2-(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3})/2}\right]}$$

$$\boldsymbol{\mathbf{E}(z) = -2Q(\pi/3)\,\overline{\left[\frac{-i\sin(\pi/3)}{\cosh(z\pi/3)-\cos(\pi/3)}\right]}}$$

(Hasta aquí está bien)

Utilizando la identidad:

$$\cosh z = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\left(\frac{\pi}{3}\right)\overline{\left[\frac{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)+i\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}}\right]}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\left(\frac{\pi}{3}\right)\overline{\left[\frac{-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}-i\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)\right]}{\left[\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)\right]^2}\right]}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\left(\frac{\pi}{3}\right)\overline{\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[i\left(\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right)+\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)\right]}{\left[\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)\right]^2}\right]}$$

$$\mathbf{E}(z) = -2Q\left(\frac{\pi}{3}\right)\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[-i\left(\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right)+\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)\right]}{\left[\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)\right]^2}\right]$$

$$\boldsymbol{\mathbf{E}(z) = \frac{-2Q\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)-i\left(\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\cosh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[\sinh\left(\frac{x\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{y\pi}{3}\right)\right]^2}}$$

b)

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

La función $u(x,y)$ es armónica si cumple con la ecuación de Laplace en una región abierta:

$$\Delta u = 0$$

El laplaciano se define como:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Derivada:

$$u_x = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) \qquad u_y = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y)$$

$$u_{xx} = e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y) \qquad u_{yy} = -e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y)$$

Entonces el laplaciano:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\Delta u = e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y) - e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y)$$

$$\Delta u = 0$$

$$\boldsymbol{\Delta u = 0 \qquad \textit{para todo el plano complejo}}$$

$$\boldsymbol{\textit{La funcion} \quad u = e^x(x\cos y - y\sin y) \quad \textit{es armónica}}$$

Determinar la función armónica conjugada, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \qquad -u_y = v_x$$

$$v_y = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) \qquad v_x = e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y)$$

Integrando v_y respecto a y, manteniendo constante x

$$v = \int v_y\,dy = \int e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)\,dy = e^x(y\cos y + x\sin y) + h(x)$$

Donde $h(x)$ es una función real arbitraria de x

Derivando v en x, tenemos

$$\frac{dv}{dx} = e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + h'(x)$$

Comparar con v_x encontrada con la ecuación de Cauchy-Riemann

$$e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + h'(x) = e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y)$$

$$h'(x) = 0$$

Integrando $h'(x) = 0$ respecto a x

$$h(x) = \int h'(x)\,dx = \int 0\,dx = C \qquad \textit{donde } C \textit{ es una constante}$$

Sustituyendo en v

$$\boldsymbol{v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + C}$$

Determinar la función analítica asociada:

$$f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$$

$$\boldsymbol{f(z) = e^{x}(x \cos y - y \sin y) + j(e^{x}(y \cos y + x \sin y) + C)}$$

(Hasta aquí está bien)

Con $y = 0$

$$f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0)$$

$$f(x) = e^{x}(x \cos 0 - 0 \sin 0) + j(e^{x}(0 \cos 0 + x \sin 0) + C)$$

$$f(x) = e^{x}(x - 0) + j(e^{x}(0 + 0) + C)$$

$$f(x) = xe^{x} + jC$$

Sustituyendo x *por* z

$$\boldsymbol{f(z) = ze^{z} + jC}$$

Donde C es una constante.

TEMA 4. APLICACIÓN: CIRCUITOS ELÉCTRICOS

a) A un capacitor de capacitancia C Faradios se le aplica la tensión $v(t) = V_m \sin(\omega t)$. Usando la definición de fasores y de corriente, y leyes de Coulomb y de Kirchoof determine los fasores de tensión, corriente e impedancias. Dibuje la tensión y corriente en tiempo y dibuje los fasores en plano complejo.

b) La corriente compleja I que circula en circuito RLC está dada por la ecuación,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = Ee^{j\omega t}$$

Determine I

SOLUCIÓN

a)

Ley de coulomb en el capacitor:

$$q(t) = C \cdot v_c(t) \qquad y\ dado\ que\ corriente\ es \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad entonces \quad i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

La ley de voltajes de Kirchoof:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t) = v_c(t)$$

En estado permanente:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}(V_m \sin(\omega t)) = C \cdot V_m \cdot \omega \cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{i(t) = \omega C \cdot V_m \cdot \cos(\omega t) = \omega C \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + 90º)}$$

Convirtiendo a fasores:

Tensión:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad \theta = 0º \qquad \boldsymbol{V_c = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\measuredangle 0º}$$

Corriente:

$$I_{rms} = \frac{\omega C V_m}{\sqrt{2}} \qquad \theta = 90º \qquad \boldsymbol{I = \frac{\omega C V_m}{\sqrt{2}}\measuredangle 90º}$$

Impedancia:

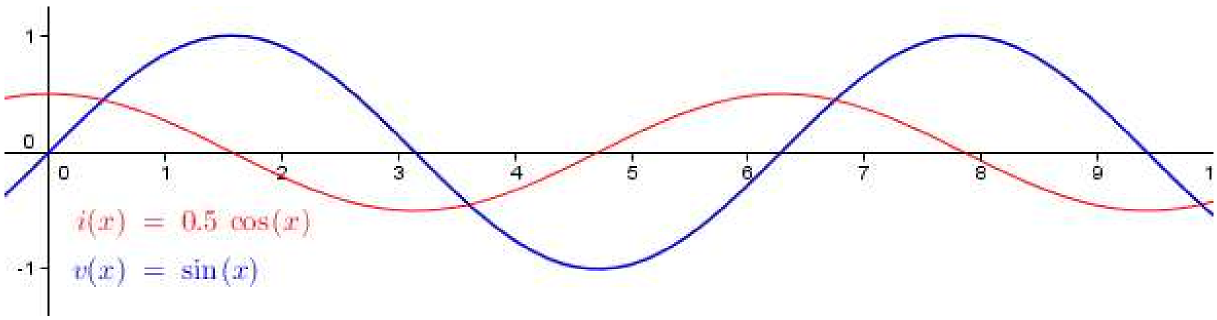
$$Z = \frac{V_c}{I} = \frac{\frac{V_m}{\sqrt{2}}\measuredangle 0º}{\frac{\omega C V_m}{\sqrt{2}}\measuredangle 90º} = \frac{1}{\omega C}\measuredangle -90º \qquad \boldsymbol{Z = \frac{1}{\omega C}\measuredangle -90º}$$

También se puede obtener de esta forma:

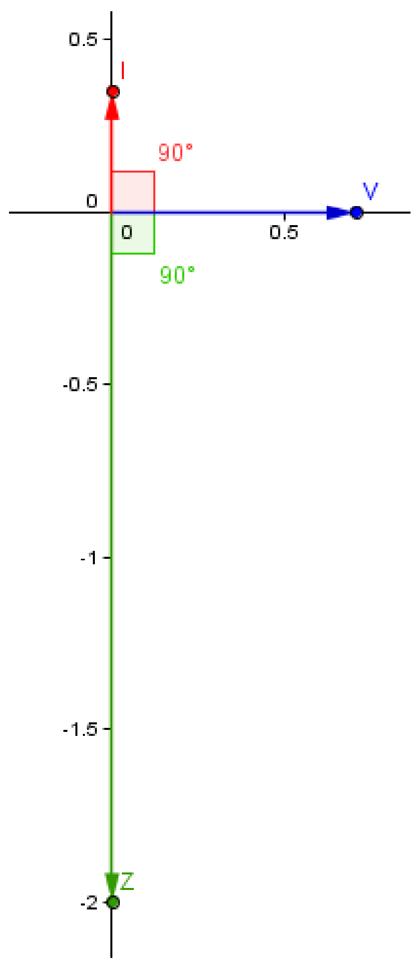
$$Z = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\cdot e^{-j\pi/2} \qquad \boldsymbol{Z = \frac{1}{\omega C}\measuredangle -90º}$$

Para graficar, suponiendo $V_m = 1\,volt$, $C = 0.5\,Faradios$, $\omega = 1\,rad/seg$

Funciones en el tiempo:



Los fasores en el plano complejo:



b)

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = Ee^{j\omega t}$$

Por método de ecuaciones diferenciales:

$$v_R = Ri \quad , \quad v_L = L\frac{di}{dt} \quad , \quad v_c = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Por ley de voltajes de Kirchhoff:

$$Ee^{j\omega t} = v_R + v_L + v_c = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I(x)\,dx$$

Para resolver la ED, se utiliza el método de coeficientes constantes indeterminados. Dado que la entrada tiene la forma de exponencial compleja, suponemos que la salida posee también la forma de exponencial compleja:

$$I = Ae^{j\omega t} \quad , \quad \frac{dI(t)}{dt} = j\omega Ae^{j\omega t} \quad , \quad \int I(x)\,dx = \frac{Ae^{j\omega t}}{j\omega}$$

Sustituyendo y determinando la constante:

$$Ee^{j\omega t} = RAe^{j\omega t} + Lj\omega Ae^{j\omega t} + \frac{1}{C}\frac{Ae^{j\omega t}}{j\omega}$$

$$E = RA + j\omega LA + \frac{A}{j\omega C}$$

$$E = A\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$A = \frac{E}{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{E}{\left(R + j\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}\right)\right)} = \frac{E}{\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right)}\right)}$$

Entonces la corriente es:

$$I = Ae^{j\omega t} = \frac{Ee^{j\omega t}}{\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right)}\right)} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{j\omega t - j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right)}$$

$$\boldsymbol{I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{j\left[\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right)\right]}}$$