Proyecto No.1

Fecha de publicación: 26 de febrero de 2016 **Fecha de entrega: 11 de marzo de 2016**

Introducción:
Este proyecto tiene como objetivo familiarizar al estudiante del curso Matemática básica 2 con el uso de un sistema de cálculo diferencial por computadora en la solución de problemas y operaciones de cálculo diferencial. Entre los programas que pueden ser utilizados para éste propósito están: Mathematica, ScientificNotebbok, Mathcad, Geogebra y MatLab. El estudiante puede utilizar el programa que considere conveniente, aunque se recomienda que utilice Mathematica.

Los profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, conscientes de esta realidad hemos impulsado el uso de las nuevas tecnologías a travésde los proyectos. Esperamos que los estudiantes hagan el esfuerzo que les corresponde con el objetivo de obtener una formación integral. El principal objetivo de este Proyecto es que el estudiante aprenda a utilizar los Sistemas Algebraicos por Computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial.

Este proyecto podrá ser desarrollado en grupos de 2 estudiantes máximo y tiene que ser entregado siguiendo el instructivo para proyectos que se encuentra en la página del departamento de matemática, su valor es de 5 puntos de zona netos al cumplir con todos los requisitos, la solución de los problemas solamente es una parte de dicho proceso.

Problema 1:

El objetivo de este problema es el uso sistemático de una computadora para el análisis numérico de los límites. Suponga que queremos analizar el valor del límite (si es que existe)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

de una función f en $x = a$. Debemos comenzar con un incremento fijo h y después calcular los valores de f en los valores de x

$$a + \frac{h}{5},\ a + \frac{h}{5^2},\ \cdots,\ a + \frac{h}{5^n},\ \cdots$$

que tienden al número a cuando n aumenta. Para analizar un límite cuando $x \to 0$, debemos considerar $a = 0$ y si hacemos $h = 1$, podemos después calcular el valor numérico de $f(x)$ en los puntos

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{5^2},\ \frac{1}{5^3},\ \cdots,\ \frac{1}{5^n} \quad = \quad 0.2,\ 0.04,\ 0.008,\ \cdots,\ (0.2)^n$$

que tienden a cero cuando n crece. Por ejemplo con la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$, cuando $x\to 0$, al acercarse a cero por la derecha y por la izquierda a cero obtenemos la tabla numérica siguiente:

x	$f(x)$
-0.2	0.1002
-0.04	0.10004
-0.008	0.100001
-0.0016	0.1000
-0.000064	0.1000
0.2	0.0998
0.04	0.09996
0.008	0.09999
0.0016	0.10000
0.00032	0.10000
0.000064	0.10000

Estos resultados numéricos sugieren que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}=\frac{1}{10}$$

1. Utilice un programa de cómputo para analizar los siguientes límites creando una tabla de valores. Deberá utilizar diferentes valores de h en cada problema. Utilice h para aproximarse por la derecha y por la izquierda, recuerde que si se acerca deben ser números lo suficientemente cercanos y pequeños.Consulte sus notas para el uso del programa *Mathematica*o sus notas del taller de matemática,para obtener ayuda sobre la creación de tablas de datos.

1.1 $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^{3/2}-8}{x-4}$

1.2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{x}-1}{x}$

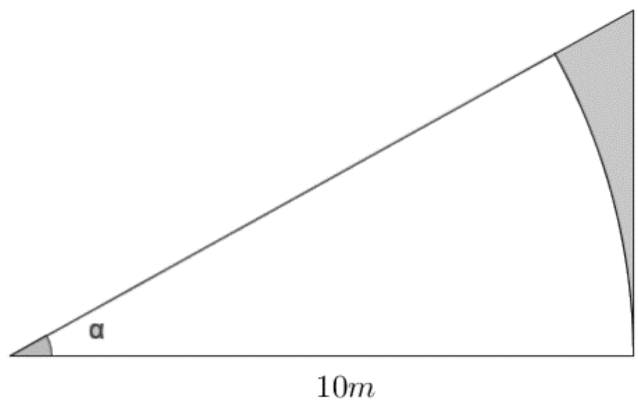
1.3 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

1.4 $\displaystyle\lim_{x\to 2^{+}}\frac{2-x}{\sqrt{4-4x+x^{2}}}$

1.5 $\displaystyle\lim_{x\to -5}\frac{x^{3}+125}{x+5}$

1.6 $\displaystyle\lim_{x\to 3^{-}}\frac{|x-3|}{x-3}$

2. Análisis numérico y gráfico: considere la región sombreada que queda fuera del sector del círculo con radio 10 m y dentro del triángulo rectángulo de la figura.



a) Exprese el área $A = f(\alpha)$ de la región en función del ángulo α. Determine el dominio de la función.
b) Utilice un SAC para completar la tabla y representar la función sobre el dominio apropiado.
c) Calcule el límite de A conforme α tiende a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda.

Problema 3:
La figura 1muestra la gráfica de la función

$$f(x) = 4x^4 - 11x^2 - 5x - 3$$

y la de su derivada

$$f'(x) = 16x^3 - 22x - 5$$

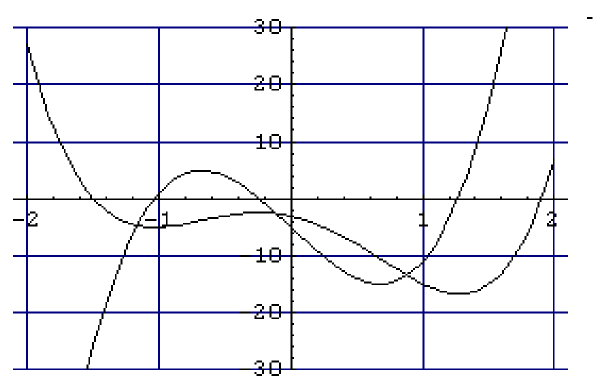


Figura 1

en el intervalo $[-2, 2]$. Para determinar el valor mínimo de f en el intervalo dado podemos intentar hacer un acercamiento al punto más bajo de la gráfica. La figura 2 muestra un acercamiento de f en el intervalo [1.271, 1.275], donde es difícil localizar el punto más bajo con precisión. La razón se debe a que después de muchos acercamientos, la gráfica es indistinguible de su recta tangente, la cual es horizontal en un máximo o en un mínimo local.

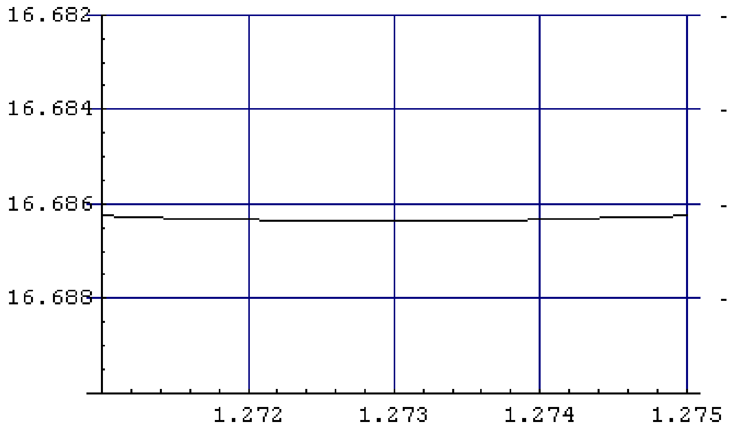


Figura 2

En consecuencia es mejor acercarse a la raíz correspondiente a la derivada $f'(x)$. Entonces podemos localizar el punto crítico con mayor precisión, como puede verse en la figura 3. Aquí es claro que el

valor mínimo alcanzado por $f(x)$ en $[-2, 2]$ es aproximadamente $f(1.273) = -16.686$.

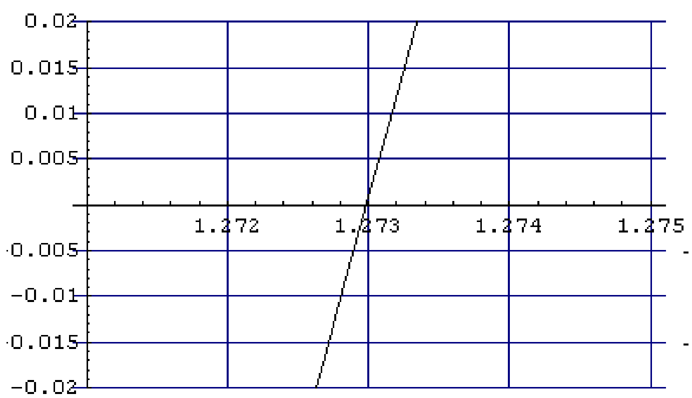


Figura 3

Para las funciones dadas elija 2 cualesquiera de ellas y utilice su programa de cómputo para desarrollar las actividades propuestas

- Calcule la primera derivada.
- Dibuje la representación gráfica de la función y su derivada en el intervalo dado, utilizando un mismo sistema de coordenadas. Haga un acercamiento de la derivada en los valores máximos y mínimos de la función. Muestre la representación gráfica del acercamiento.

- Determine aproximadamente de la gráfica el valor de x, en donde se localiza el máximo o el mínimo.
- Utilice su programa de cómputo para resolver la ecuación $f'(x) = 0$, compare los resultados obtenidos con las estimaciones del inciso anterior.
- Evaluar la función en los valores de x, del inciso anterior, para encontrar los máximos o mínimos.
- Determine en que intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente.

1) $f(x) = 8x^5 + 45x^4 + 80x^3 + 90x^2 + 200x;\quad [-4, 2]$

2) $f(x) = \operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3},\quad [-\pi, \pi]$

3) $f(x) = \dfrac{10x(x-1)^4}{(x-2)^3(x+1)^2};\quad [-4, 4]$

4) $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3};\quad [-5, 5]$

5) $f(x) = e^{\cos x};\quad [0, 2\pi]$

Problema 3: Modelado de funciones

La tabla siguiente muestra los datos obtenidos en el Laboratorio "Texas Instruments Calculator-BasedLaboratory (CBL) System. Con aparatos sofisticados se ha medido la posición en metros y la velocidad metros por segundo de un objeto en caída libre dentro de una cámara en la cual no hay resistencia del aire.

Tiempo (segundos)	**Altura (metros)**	Velocidad (metros/seg)
0.00	0.290864	-0.16405
0.02	0.284279	-0.32857
0.04	.0274400	-0.49403
0.06	0.260131	-0.71322
0.08	0.241472	-0.93309
0.10	0.219520	-1.09409
0.12	0.189885	-1.47891
0.14	0.160250	-1.47655
0.16	0.126224	-0.69994
0.18	0.086711	-1.96997
0.20	0.045002	-2.07747
0.22	0.000000	-2.25010

El objetivo de este problema es comprobar que las fórmulas teóricas de posición $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ y velocidad $v = v_0 + gt$ coinciden con las fórmulas obtenidas experimentalmente utilizando modelación.

2.1 Utilice su programa de cómputo para dibujar la representación gráfica de los datos correspondientes a la altura del objeto en términos del tiempo.

2.2 Utilice modelación para obtener una función cuadrática de la forma $s = a + bt + ct^2$ que se ajuste a los datos.

2.3 Dibuje la representación gráfica de los datos y la del modelo cuadrático obtenido en una misma ventana. ¿Se ajusta el modelo a los datos, explique?

2.4 ¿Corresponden el coeficiente del término cuadrático y el coeficiente del término lineal a los valores esperados de gravedad y velocidad inicial del objeto, explique?

2.4 Dibuje una representación gráfica de los datos de velocidad del objeto en términos del tiempo.

2.5 Utilice modelación para obtener un modelo lineal de la forma $v = a + bx$ que se ajuste a los datos.

2.6 Dibuje la representación gráfica de los datos y el modelo lineal. ¿Se ajusta el modelo a los datos, explique?

2.7 Utilice su programa de cómputo para calcular $v = \frac{ds}{dt}$, donde s es la función de posición obtenida de los datos experimentales. ¿Coincide la derivada obtenida con la función de velocidad obtenida utilizando los resultados experimentales, explique?

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo: trascendentes tempranas, Septima edición. Cengage-LearningEditores.

[2] Castillo Miguel. Manual para el uso del paquete *Mathematica*.

[3] Edwards y Peney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] U. S. Naval Observatory, Washington, DC. http://www.usno.navy.mi

[5] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt