Proyecto No.1

Entrega: martes 6 de marzo de 2018

Introducción:

El desarrollo de la tecnología en el área de las computadoras y las calculadoras con capacidades numéricas, simbólicas y de graficación; ha influido en las metodologías utilizadas en los procesos enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe en parte a que los Sistemas Algebraicos por Computadora (SAC) permiten visualizar todo tipo de gráficas y realizar una amplia variedad de cálculos que hace apenas algunos años era imposible. Los profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, conocedores de esta realidad hemos impulsado el uso de las nuevas tecnologías a través del taller de matemática y proyectos grupo. Esperamos que los estudiantes hagan el esfuerzo que les corresponde con el objetivo de obtener una formación integral.

Objetivos:

Uno de los objetivos de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial e integral. El segundo objetivo es fomentar el trabajo en equipo en la solución de problemas, específicamente en el área de matemática.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica.*
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Solución de ecuaciones

Una ecuación con una incógnita de la forma

$$f(x) = g(x)$$

Puede resolverse en forma aproximada utilizando el procedimiento siguiente:

1. Exprese la ecuación en la forma $F(x) = f(x) - g(x) = 0$

2. Dibuje la representación gráfica de la función $F(x)$

3. Las soluciones de la ecuación se encuentran en los valores en donde la gráfica interseca al eje x. Para encontrar estos valores con la precisión requerida pueden hacerse ampliaciones sucesivas en los puntos de intersección, hasta que tengamos la solución con tantos decimales como sea necesario.

Para las ecuaciones dadas

i) Utilice el procedimiento descrito para encontrar las soluciones de cada ecuación con al menos dos decimales exactos.

ii) Encuentre las soluciones de las ecuaciones utilizando los comandos apropiados del programa de cómputo utilizado.

iii) Resuelva las ecuaciones utilizando procedimientos algebraicos.

1.1 $x^5 + x = 100$

1.2 $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 4$

1.3 $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-3}} + \sqrt{\dfrac{x-3}{2x-5}} = \dfrac{11}{2}$

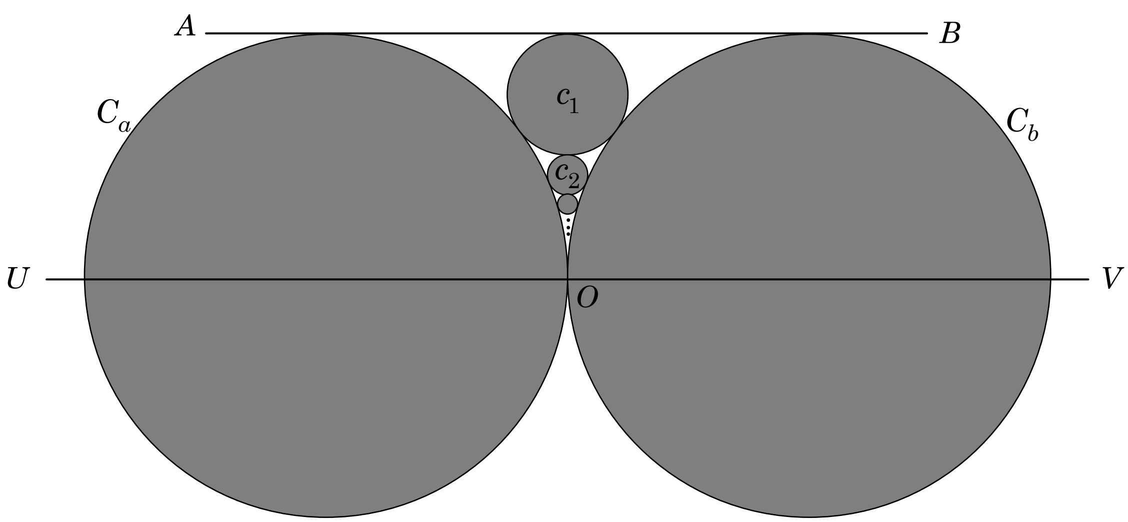
1.4 $|x-1| + |x-3| + |x+1| + |x+3| = 6$

1.5 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones dibujando en el mismo sistema de coordenadas las representaciones gráficas de las ecuaciones y luego haciendo aproximaciones hasta obtener las coordenadas aproximadas de los puntos de intersección.

$$4x^2 + 10xy = 6x - 7$$
$$4x - 3 = 2x^2 + 6(xy + 1)$$

Problema 2: Un problema de los círculos tangentes

Considere la figura siguiente



Las dos circunferencias C_a y C_b tienen radio igual a 1 y son tangentes en el punto O, el segmento AB es tangente a ambas circunferencias. El segmento UV, pasa por el centro de C_a y C_b. La circunferencia c_1 es tangente a las circunferencias C_a y C_b y al segmento AB. La circunferencia c_2 es tangente a las circunferencias C_a y C_b y a la circunferencia c_1. La circunferencia c_3 es tangente a las circunferencias C_a y C_b y a la circunferencia c_2. Ahora imagine que siguiendo el mismo procedimiento se forman infinitas circunferencias tangentes a C_a y C_b y a la circunferencia anterior.

2.1 Muestre utilizando el teorema de Pitágoras que el diámetro de la circunferencia c_1 es igual a $\frac{1}{2}$

2.2 Muestre que el diámetro de la circunferencia c_2 es igual a $\frac{1}{6}$

2.3 Observe que la suma de los diámetros de las circunferencias c_1 y c_2 puede expresarse como

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}$$

Observando la suma anterior, obtenga una expresión para la suma de los primeros 6 diámetros de las circunferencias generadas y calcule su suma.

2.4 ¿Cuál es el valor de la suma infinita de todos los diámetros?

Problema 3: Modelado de funciones

Se tiene un alambre de 100 centímetros de largo. Este alambre será cortado en dos partes, con la primera de ellas, de longitud x se construirá un triángulo equilátero. Con la segunda parte, de longitud $100 - x$, se construirá un círculo. El objetivo del problema consiste en encontrar el punto en donde debe cortarse el alambre de tal forma que el área combinada de las dos figuras geométricas, llamada $A(x)$, sea máxima o mínima.

4.1 Esta primera parte del problema es experimental. Utilizando una cuerda de 100 centímetros de largo, realice cortes de longitud x, como se indica en la tabla. Con el primer segmento construya un triángulo equilátero y con el segundo segmento construya un círculo. Mida el lado y la altura del triángulo y calcule el área del triángulo $A_1(x)$. Mida el radio del círculo y calcule el área del círculo $A_2(x)$. Calcule la suma de áreas $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$. Realice el procedimiento descrito anteriormente para cada valor de x y complete la tabla siguiente.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$A_1(x)$											
$A_2(x)$											
$A(x)$											

4.2 Con los datos de la tabla, dibuje la representación gráfica de la función $A(x)$. Use la gráfica para estimar el valor de x de tal forma que $A(x)$ sea mínima. Para qué valor de x el área es máxima.

4.3 Estime (usando la gráfica) las dimensiones del triángulo y el radio del círculo en donde el área $A(x)$ es mínima.

4.4 Ahora debe resolver el problema en forma analítica, para ello exprese el área del triángulo y el área del círculo como función de x (no utilice valores decimales).

4.5 Sume las áreas del triángulo y del círculo para obtener la función $A(x)$. ¿Qué tipo de función ha obtenido?

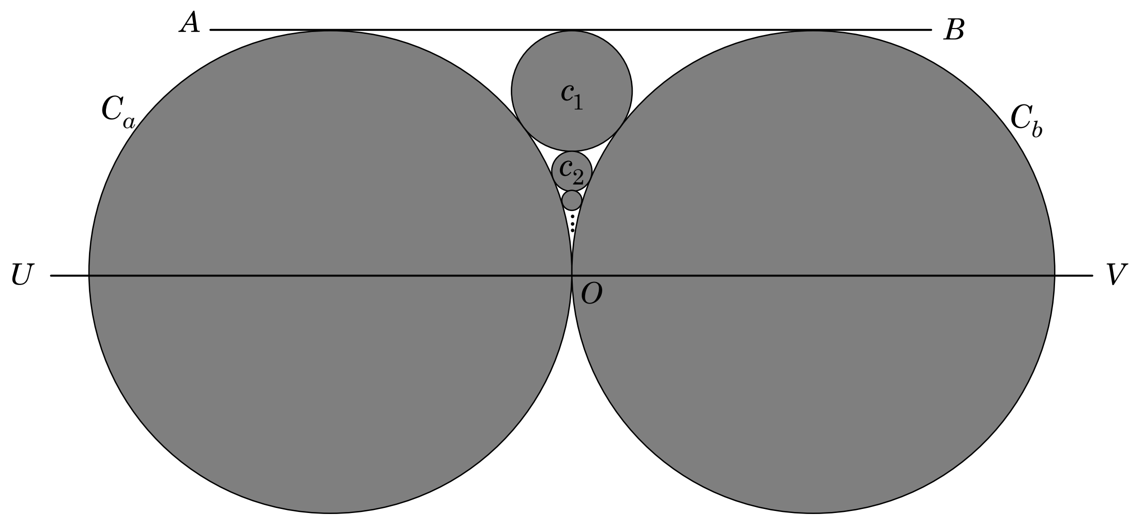
4.6 Como la función del inciso anterior es cuadrática, encuentre las coordenadas del vértice (no utilice decimales).

4.7 Determine ahora las dimensiones exactas del triángulo y del círculo para que el área combinada de las dos figuras sea mínima.

4.8 Compare los resultados obtenidos experimentalmente con los resultados exactos y escriba un comentario sobre sus observaciones.

Problema 2: Un problema de los círculos tangentes

Considere la figura siguiente



Las dos circunferencias C_a y C_b tienen radio igual a 1 y son tangentes en el punto O, el segmento AB es tangente a ambas circunferencias. El segmento UV, pasa por el centro de C_a y C_b. La circunferencia c_1 es tangente a las circunferencias C_a y C_b y al segmento AB. La circunferencia c_2 es tangente a las circunferencias C_a y C_b y a la circunferencia c_1. La circunferencia c_3 es tangente a las circunferencias C_a y C_b y a la circunferencia c_2. Ahora imagine que siguiendo el mismo procedimiento se forman infinitas circunferencias tangentes a C_a y C_b y a la circunferencia anterior.

2.1 Muestre utilizando el teorema de Pitágoras que el diámetro de la circunferencia c_1 es igual a $\frac{1}{2}$

2.2 Muestre que el diámetro de la circunferencia c_2 es igual a $\frac{1}{6}$

2.3 Observe que la suma de los diámetros de las circunferencias c_1 y c_2 puede expresarse como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)}$$

Observando la suma anterior, obtenga una expresión para la suma de los primeros 6 diámetros de las circunferencias generadas y calcule su suma.

2.4 ¿Cuál es el valor de la suma infinita de todos los diámetros?

Problema 3: Modelado de funciones

Se tiene un alambre de 100 centímetros de largo. Este alambre será cortado en dos partes, con la primera de ellas, de longitud x se construirá un triángulo equilátero. Con la segunda parte, de longitud $100 - x$, se construirá un círculo. El objetivo del problema consiste en encontrar el punto en donde debe cortarse el alambre de tal forma que el área combinada de las dos figuras geométricas, llamada $A(x)$, sea máxima o mínima.

4.1 Esta primera parte del problema es experimental. Utilizando una cuerda de 100 centímetros de largo, realice cortes de longitud x, como se indica en la tabla. Con el primer segmento construya un triángulo equilátero y con el segundo segmento construya un círculo. Mida el lado y la altura del triángulo y calcule el área del triángulo $A_1(x)$. Mida el radio del círculo y calcule el área del círculo $A_2(x)$. Calcule la suma de áreas $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$. Realice el procedimiento descrito anteriormente para cada valor de x y complete la tabla siguiente.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$A_1(x)$											
$A_2(x)$											
$A(x)$											

4.2 Con los datos de la tabla, dibuje la representación gráfica de la función $A(x)$. Use la gráfica para estimar el valor de x de tal forma que $A(x)$ sea mínima. Para qué valor de x el área es máxima.

4.3 Estime (usando la gráfica) las dimensiones del triángulo y el radio del círculo en donde el área $A(x)$ es mínima.

4.4 Ahora debe resolver el problema en forma analítica, para ello exprese el área del triángulo y el área del círculo como función de x (no utilice valores decimales).

4.5 Sume las áreas del triángulo y del círculo para obtener la función $A(x)$. ¿Qué tipo de función ha obtenido?

4.6 Como la función del inciso anterior es cuadrática, encuentre las coordenadas del vértice (no utilice decimales).

4.7 Determine ahora las dimensiones exactas del triángulo y del círculo para que el área combinada de las dos figuras sea mínima.

4.8 Compare los resultados obtenidos experimentalmente con los resultados exactos y escriba un comentario sobre sus observaciones.

Referencias

[1] Castillo Miguel. *Instructivo para el Taller de Matemátaica Básica 1*. Segunda edición, Editorial Estudiantil Fenix.
[2] Stewart J. Redlin L. Watson S. *Precálculo.* Quinta. edición. Thomson editores.
[3] Saquimux J. *Geometría de Elemental.*