Proyecto No.1

Segundo semestre de 2016

Fecha de entrega: martes 6 de septiembre

Introducción:

Este proyecto tiene como objetivo familiarizar al estudiante del curso Matemática básica 1 con el uso de los sistemas algebraicos por computadora en la solución de problemas matemáticos. Entre los programas que pueden ser utilizados para éste propósito están: Scientific Notebook, Mathematica, Maple, Geogebra, etc. El estudiante puede utilizar el programa que considere conveniente, aunque se recomienda que utilice el programa Mathematica.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este proyecto se presentan en cuatro problemas. En el primero de ellos se aborda la solución de ecuaciones utilizando métodos gráficos y métodos computacionales. En el segundo problema el estudiante debe utilizar sus conocimientos de geometría para resolver un problema de áreas sombreadas en un círculo. En el tercer problema el estudiante utilizará sus conocimientos de geometría análitica, específicamente la circunferencia y la recta para resolver un problema de rectas tangentes a una circunferencia. En el cuarto y último problema se combina la modelación de funciones con la geometría; en este problema el estudiante debe obtener un modelo matemático de forma experimental y compararlo con el modelo matemático exacto.

Problema 1: Solución de ecuaciones

Una ecuación con una incógnita de la forma

$$f(x) = g(x)$$

Puede resolverse en forma aproximada utilizando el procedimiento siguiente:

1. Exprese la ecuación en la forma $F(x) = f(x) - g(x) = 0$
2. Dibuje la representación gráfica de la función $F(x)$
3. Las soluciones de la ecuación se encuentran en los valores en donde la gráfica interseca al eje x. Para encontrar estos valores con la precisión requerida pueden hacerse ampliaciones sucesivas en los puntos de intersección, hasta que tengamos la solución con tantos decimales como sea necesario.

Para las ecuaciones dadas

i) Utilice el procedimiento descrito para encontrar las soluciones de cada ecuación con al menos dos decimales exactos.

ii) Encuentre las soluciones exactas de las ecuaciones utilizando los comandos apropiados del programa de cómputo utilizado.

1.1 $x^5 + x = 100$

1.2 $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 4$

1.3 $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x-3}} + \sqrt{\dfrac{x-3}{2x-5}} = \dfrac{11}{2}$

1.4 $|x-1| + |x-3| + |x+1| + |x+3| = 6$

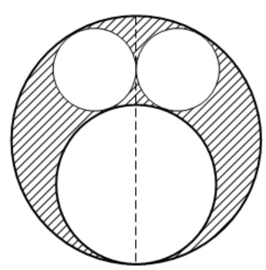
1.5 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones dibujando en el mismo sistema de coordenadas las representaciones gráficas de las ecuaciones y luego haciendo aproximaciones hasta obtener las coordenadas aproximadamente exactas de los puntos de intersección.

$$4x^2 + 10xy = 6x - 7$$

$$4x - 3 = 2x^2 + 6(xy + 1)$$

Problema 2: Un problema de áreas sombreadas

La figura muestra un círculo de 6 centímetros de radio que tiene inscritos tres círculos de menor radio. Los dos círculos pequeños tienen radio de 2 centímetros y son tangentes al círculo mayor y al diámetro mostrado con línea discontinua. El otro círculo tiene radio desconocido y es tangente a los dos círculos pequeños y al círculo mayor. El círculo mayor y el círculo de radio desconocido tienen ambos un diámetro en el mismo segmento. Determine el valor del área sombreada.



Problema 3: Recta y ecuación del círculo

3.1 Utilice su programa de cómputo para dibujar la gráfica del círculo $x^2 + (y+1)^2 = 9$

3.2 Existen dos rectas tangentes al círculo, que pasan por el punto $(0, 5)$. Estime algunos valores para las pendientes de éstas rectas y dibuje sus representaciones gráficas en el mismo plano que el círculo.

3.3 Para encontrar el valor exacto de la pendiente de éstas tangentes se requiere utilizar cálculo diferencial, sin embargo, es posible encontrar su valor exacto siguiendo el siguiente procedimiento algebraico.

3.4 Exprese la ecuación de la tangente en la forma $y = mx + b$, en donde el valor de m es desconocido y el valor de b es conocido.

3.5 Resuelva el sistema de ecuaciones formado por la recta tangente y la ecuación del círculo

$$x^2 + (y+1)^2 = 9$$
$$y = mx + b$$

3.6 Despeje x en términos de m en sistema de ecuaciones anterior utilizando la fórmula cuadrática.

3.7 Como la tangente y el círculo se intersecan en un solo punto, la ecuación cuadrática debe tener solución única y por lo tanto el discriminante de la misma debe ser cero; iguale a cero el discriminante y despeje el valor de m.

3.8 Compare los valores exactos de m con los valores estimados en m en el inciso 2.2. Dibuje la gráfica del círculo y de las dos rectas tangentes en un mismo plano de coordenadas.

Problema 4: Modelado de funciones

Se tiene un alambre de 100 centímetros de largo. Este alambre será cortado en dos partes, con la primera de ellas, de longitud x se construirá un triángulo equilátero. Con la segunda parte, de longitud $100 - x$, se construirá un círculo. El objetivo del problema consiste en encontrar el punto en donde debe cortarse el alambre de tal forma que el área combinada de las dos figuras geométricas, llamada $A(x)$, sea máxima o mínima.

4.1 Esta primera parte del problema es experimental. Utilizando una cuerda de 100 centímetros de largo, realice cortes de longitud x, como se indica en la tabla. Con el primer segmento construya un triángulo equilátero y con el segundo segmento construya un círculo. Mida el lado y la altura del triángulo y calcule el área del triángulo $A_1(x)$. Mida el radio del círculo y calcule el área del círculo $A_2(x)$. Calcule la suma de áreas $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$. Realice el procedimiento descrito anteriormente para cada valor de x y complete la tabla siguiente.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$A_1(x)$											
$A_2(x)$											
$A(x)$											

4.2 Con los datos de la tabla, dibuje la representación gráfica de la función $A(x)$. Use la gráfica para estimar el valor de x de tal forma que $A(x)$ sea mínima. Para qué valor de x el área es máxima.

4.3 Estime (usando la gráfica) las dimensiones del triángulo y el radio del círculo en donde el área $A(x)$ es mínima.

4.4 Ahora debe resolver el problema en forma analítica, para ello exprese el área del triángulo y el área del círculo como función de x (no utilice valores decimales).

4.5 Sume las áreas del triángulo y del círculo para obtener la función $A(x)$. ¿Qué tipo de función ha obtenido?

4.6 Como la función del inciso anterior es cuadrática, encuentre las coordenadas del vértice (no utilice decimales).

4.7 Determine ahora las dimensiones exactas del triángulo y del círculo para que el área combinada de las dos figuras sea mínima.

4.8 Compare los resultados obtenidos experimentalmente con los resultados exactos y escriba un comentario sobre sus observaciones.

Referencias

[1] Edwards y Penney. *Cálculo Con Geometría Analítica*. Séptima edición, Pearson-Prentice Hall.

[2] Castillo Miguel. *Instructivo para el Taller de Matemátaica Básica 1*. Segunda edición, Editorial Estudiantil Fenix.

[3] Stewart J. Redlin L. Watson S. *Precálculo*. Quinta. edición. Thomson editores.

[4] Saquimux J. *Geometría de Precálculo*.