Proyecto No.1

Entrega: martes 7 de marzo

Introducción:

El desarrollo de la tecnología en el área de las computadoras y las calculadoras con capacidades numéricas, simbólicas y de graficación; ha influido en las metodologías utilizadas en los proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe en parte a que los Sistemas Algebraicos por Computadora (SAC) permiten visualizar todo tipo de gráficas y realizar una amplia variedad de cálculos que hace apenas algunos años era imposible. Los profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, conocedores de esta realidad hemos impulsado el uso de las nuevas tecnologías a través del taller de matemática y proyectos grupo. Esperamos que los estudiantes hagan el esfuerzo que les corresponde con el objetivo de obtener una formación integral.

Objetivos:

Uno de los objetivos de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial e integral. El segundo objetivo es fomentar el trabajo en equipo en la solución de problemas, específicamente en el área de matemática.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica.*
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Cálculo de límites

En este problema se utiliza una computadora para el análisis numérico, gráfico y algebraico de los límites.

Análisis numérico

Suponga que queremos aproximar el valor del límite (si es que existe)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Cuando x tiende al número a por la derecha podemos utilizar la serie de números

$$a+h, a+h^2, a+h^3, \cdots, a+h^n$$

donde h es un número pequeño, $0 < h < 1$. Por ejemplo, si $h = 0.1$, obtenemos la siguiente serie de números que se aproximan a $x = a$ por la derecha

$$a+0.1, a+(0.1)^2, a+(0.1)^3, \cdots, a+(0.1)^n = a+0.1, a+0.01, a+0.001, \cdots, a+(0.1)^n$$

De la misma forma, para analizar el límite cuando x tiende a a por la izquierda podemos utilizar una serie de la forma

$$a-h, a-h^2, a-h^3, \cdots, a-h^n$$

si $h = 0.1$ obtenemos

$$a-0.1, a-(0.1)^2, a-(0.1)^3, \cdots, a-(0.1)^n = a-0.1, a-0.01, a-0.001, \cdots, a-(0.1)^n$$

Para ilustrar este procedimiento, considera la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$, cuando $x \to 0^+$, con $h = 0.2$, obtenemos la tabla numérica siguiente:

x	$f(x)$
0.2	0.0998
0.04	0.09996
0.008	0.09999
0.0016	0.10000
0.00032	0.10000
0.000064	0.10000

Estos resultados numéricos sugieren que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = \frac{1}{10}$$

Análisis gráfico:

Una forma sencilla de calcular aproximadamente un límite utilizando la representación gráfica de la función consiste en hacer uno o más acercamientos de la gráfica en el valor de x en donde queremos calcular el límite. Mientras más acercamientos efectuemos, mejor será la estimación que hagamos.

Análisis algebraico:

La mayoría de programas de matemático tienen uno o más comandos para el cálculo exacto de límites. Consulte el instructivo del programa que está utilizando para obtener el comando apropiado que le permita calcular directamente un límite.

Ejercicios:

Para cada uno de los límites que se proponen a continuación:

(a) Utilice su programa de cómputo para calcular aproximadamente los límites utilizando el análisis numérico descrito anteriormente. Deberá utilizar diferentes valores de h en cada problema y calcular el límite por la izquierda y por la derecha.

(b) Calcule los límites gráficamente realizando al menos dos aproximaciones de la gráfica. Debe dejar constancia gráfica de sus aproximaciones.

(c) Utilice su programa de cómputo para calcular el valor exacto de los límites.

(d) Calcule el límite utilizando procedimientos algebraicos

1.1 $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

1.2 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

1.3 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x}\right)$

1.4 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$

Problema 2: Astroid

La gráfica de la ecuación $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ recibe el nombre de Astroid.

2.1 Para los valores de $a=1,\ 2,\ 3$; utilice su programa de cómputo para dibujar la representación gráfica correspondiente.

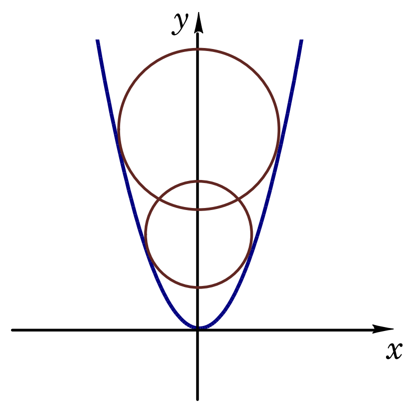
2.2 Para el Astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, encuentre una ecuación general de la recta tangente a ésta curva en el primer cuadrante.

2.3 Dibuje la representación gráfica del Astroid y la de una recta tangente que pasen por un punto de la curva en el primer cuadrante.

2.4 Demuestre el segmento de recta que es tangente al astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ en el primer cuadrante, limitado por los ejes x & y; tiene longitud "a".

Problema 3: El problema del mayor circulo tangente a la parábola

Considere la parábola cuya ecuación es $y=x^2$ y todos los círculos que tiene su centro en el eje y, tangentes a la parábola. En la figura se muestra la parábola y dos de éstos círculos.



3.1 Encuentre el radio del círculo que sea tangente a la parábola como se muestra en la figura y que tenga su centro en el punto $(0,2)$

3.2 Obtenga la ecuación de la circunferencia que sea tangente a la parábola como se muestra en la figura y que tanga radio 1.

3.3 Observe que a medida que se reduce el radio del círculo, el círculo tiende a ser tangente en el origen. Obtenga el radio del círculo más grande posible, de manera que sea tangente al eje x en el origen y que sea tangente a la parábola como se muestra en la figura.

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, sexta edición. Cengage Learning.

[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook* y *Mathematica.*

[3] Edwards y Penney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt

[5] http://matematicaenlinea.com