Proyecto No.1

Entrega: martes 6 de marzo

Introducción:

El desarrollo de la tecnología en el área de las computadoras y las calculadoras con capacidades numéricas, simbólicas y gráficas; ha influido en las metodologías utilizadas en los proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe en parte a que los Sistemas Algebraicos por Computadora (SAC) permiten visualizar todo tipo de gráficas y realizar una amplia variedad de cálculos que hace apenas algunos años era imposible. Los profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, conocedores de esta realidad hemos impulsado el uso de las nuevas tecnologías a través del taller de matemática y proyectos grupo. Esperamos que los estudiantes hagan el esfuerzo que les corresponde con el objetivo de obtener una formación integral.

Objetivos:

Uno de los objetivos de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial e integral. El segundo objetivo es fomentar el trabajo en equipo en la solución de problemas, específicamente en el área de matemática.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica.*
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Cálculo de límites

En este problema se utiliza una computadora para el análisis numérico, gráfico y algebraico de los límites.

Análisis numérico

Suponga que queremos aproximar el valor del límite (si es que existe)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Cuando x tiende al número a por la derecha podemos utilizar la serie de números

$$a+h, a+h^2, a+h^3, \cdots, a+h^n$$

donde h es un número pequeño, $0 < h < 1$. Por ejemplo, si $h = 0.1$, obtenemos la siguiente serie de números que se aproximan a $x = a$ por la derecha

$$a+0.1, a+(0.1)^2, a+(0.1)^3, \cdots, a+(0.1)^n = a+0.1, a+0.01, a+0.001, \cdots, a+(0.1)^n$$

De la misma forma, para analizar el límite cuando x tiende a a por la izquierda podemos utilizar una serie de la forma

$$a-h, a-h^2, a-h^3, \cdots, a-h^n$$

si $h = 0.1$ obtenemos

$$a-0.1, a-(0.1)^2, a-(0.1)^3, \cdots, a-(0.1)^n = a-0.1, a-0.01, a-0.001, \cdots, a-(0.1)^n$$

Para ilustrar este procedimiento, considera la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$, cuando $x \to 0^+$, con $h = 0.2$, obtenemos la tabla numérica siguiente:

x	$f(x)$
0.2	0.0998
0.04	0.09996
0.008	0.09999
0.0016	0.10000
0.00032	0.10000
0.000064	0.10000

Estos resultados numéricos sugieren que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = \frac{1}{10}$$

Análisis gráfico:

Una forma sencilla de calcular aproximadamente un límite utilizando la representación gráfica de la función consiste en hacer uno o más acercamientos de la gráfica en el valor de x en donde queremos calcular el límite. Mientras más acercamientos efectuemos, mejor será la estimación que hagamos.

Análisis algebraico:

La mayoría de programas matemáticos tienen uno o más comandos para el cálculo exacto de límites. Consulte el instructivo del programa que está utilizando para obtener el comando apropiado que le permita calcular directamente un límite.

Ejercicios:

Para cada uno de los límites que se proponen a continuación:

a. Utilice su programa de cómputo para calcular aproximadamente los límites utilizando el análisis numérico descrito anteriormente. Deberá utilizar diferentes valores de h en cada problema y calcular el límite por la izquierda y por la derecha.

b. Calcule los límites gráficamente realizando al menos dos aproximaciones de la gráfica. Debe dejar constancia gráfica de sus aproximaciones.

c. Utilice su programa de cómputo para calcular el valor exacto de los límites.

d. Calcule el límite utilizando procedimientos algebraicos

1.1 $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$

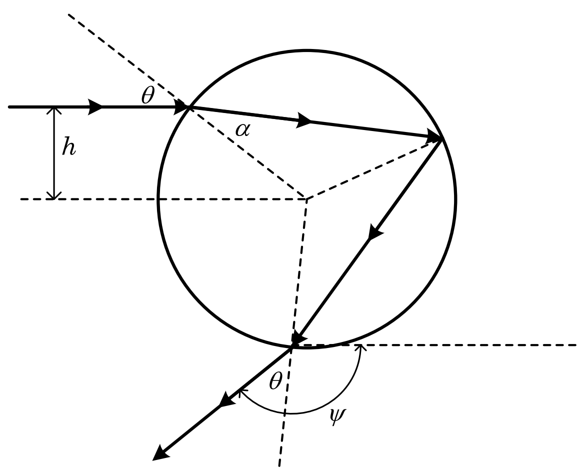
1.2 $\lim_{x\to\infty} x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1.3 $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+x}\right)$

1.4 $\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

Problema 2: Formación del arco iris

El arco iris se forma cuando la luz del Sol atraviesa las gotas de lluvia, sufriendo reflexión y refracción, como se muestra en la figura (en la que se ve una sección de gota esférica). Un rayo de luz sigue la trayectoria indicada con las líneas con flecha.



La ley de refracción de la luz establece que cuando un rayo de luz penetra en la gota de agua con un ángulo de inclinación θ con respecto a una perpendicular a la superficie de la gota de agua, el rayo de luz es desviado un ángulo α con respecto a la misma línea perpendicular. La ley refracción también establece que

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\alpha}=k$$

donde $k=\frac{4}{3}$ para una gota de agua.

1.1 Muestre que el ángulo de desviación ψ está dado por

$$\psi(\theta)=\pi+2\theta-4\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{k}\text{sen}\,\theta\right)$$

1.2 Dibuje la representación gráfica de la función $\psi(\theta)$ para $0 \le \theta \le \pi$, con $k = \frac{4}{3}$

1.3 Utilice su programa de cómputo para calcular $\psi'(\theta)$

1.4 Probar que el ángulo de desviación mínimo ocurre cuando

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{3}}$$

1.5 Para el agua, ¿Cuál es el ángulo de desviación mínimo?

1.6 El ángulo $\beta = \pi - \psi_{\min}$ recibe el nombre de ángulo del arco iris. ¿Qué valor de θ produce un valor de β mínimo? Un rayo que atraviesa una gota de agua con el valor de β mínimo se llama rayo del arco iris.

Problema 3: Problema de razones de cambio

Un depósito tiene la forma de un cono circular recto, con su base hacia arriba. El cono tiene un radio en la parte superior de 5 pies, una altura de 10 pies y en su interior contiene agua hasta una profundidad de 7 pies.

3.1 Si al depósito se introduce un cilindro circular recto sólido, de 2 pies de radio y 4 pies de altura, con su eje en posición vertical y que desciende a una velocidad constante de 0.1 pie por segundo, Determine si el depósito se rebalsa o bien si el cilindro primero se detiene al hacer contacto con el cono.

3.2 Cuanto tiempo transcurre desde que el cilindro hace contacto con el agua, hasta que se rebalsa o bien hace contacto con el cono, lo que ocurra primero.

3.3 Calcule la razón a la cual aumenta la altura del agua en el depósito, cuando el cilindro tiene exactamente 1 pie sumergido dentro del agua.

3.4 Calcule la razón a la cual aumenta la altura cuando han transcurrido 10 segundos desde que el cilindro hace contacto con el agua.

3.5 Suponga ahora que al mismo depósito se introduce un cono circular recto, de 8 pies de altura y 4 pies de radio. El cono desciende a una velocidad constante de 0.1 pies por segundo y con el vértice hacia abajo. Determine si el depósito se rebalsa y en cuanto tiempo ocurre esto.

3.6 Determine la razón a la cual aumenta la altura del agua en el depósito cuando el cono que desciende se ha sumergido 1 pie en el agua.

3.7 Que tan rápido aumenta la altura del agua cuando han transcurrido 10 segundos.

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, sexta edición. Cengage Learning.

[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas Scientific Notebook y Mathematica.

[3] Edwards y Penney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt

[5] http://matematicaenlinea.com