

Proyecto 1

Fecha de entrega: martes 30 de agosto de 2016

Introducción:

El desarrollo de proyectos en pareja, es importante en la formación del estudiante ya que le permite interactuar con sus compañeros en la solución de problemas, los cuales requieren el uso de tecnología para su solución.

Para resolver los problemas, los dos estudiantes deben realizar un análisis matemático así como realizar los cálculos utilizando el software que consideren conveniente. Entre los programas que puede utilizar están: Scientific Notebbok, Mathematica, Maple, derive, Matlab, etc.

El informe debe ser presentado utilizando un procesador de textos, en cuyo caso deben importarse los resultados del programa matemático o bien editando completamente el informe con el editor que incluyen algunos programas como Scientific Notebook, Mathematica y Maple.

Criptografía

Muchas veces en el mundo de la informática, se necesita enviar mensajes encriptados que sean difíciles de descifrar por personas a las que no se les quiere dar la información pero que si lo sea por las personas que lo deben recibir. Si bien es cierto que hay muchas formas de encriptar, en la mayoría de los casos se usa el álgebra de matrices para hacerlo. Se dará a continuación un ejemplo muy eficaz que se puede usar una matriz código cuadrada.

Se escoge un matriz M que tenga inversa, la cual solo debe ser conocida por las personas que lo envían y las personas a las que envían el mensaje.

Ejemplo: Si queremos encriptar el mensaje "Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico." reemplazamos cada letra del mensaje por el numero que le corresponde en el abecedario

A = 1	B=2	C=3	D=4	E=5	F=6	G=7
H=8	I=9	J=10	K=11	L=12	M=13	N=14
Ñ=15	O=16	P=17	Q=18	R=19	S=20	T=21
U=22	V=23	X=24	Y=25	Z=26		

Dándole al espacio en blanco el cero (0), al punto (.) el 27, a la coma (,) el 28, a la a tildada (á) el 29, e tildada el (é) el 30, i tildada el (í) el 31, y la o tildada el (ó) el 32.

En este caso tenemos: 13, 5, 10, 16, 19, 0, 18, 22, 5, 0, 4, 5, 0, 14, 22, 5, 20, 21, 19, 16, 0, 10, 22, 9, 3, 9, 16, 28, 0, 4, 5, 2, 5, 13, 16, 20, 0, 16, 9, 1, 19, 14, 16, 20, 0, 4, 5, 12, 0, 3, 29, 12, 3, 22, 12, 16, 0, 1, 12, 7, 5, 2, 19, 1, 9, 3, 16, 27.

La lista de números obtenida debe ser ordenada como una matriz de cuatro filas y las columnas que sean necesarias, colocando los números en mismo orden del listado (nótese que se van formando las filas), así:

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 10 & 16 & 19 & 0 & 18 & 22 & 5 & 0 & 4 & 5 & 0 & 14 & 22 & 5 & 20 \\ 21 & 19 & 16 & 0 & 10 & 22 & 9 & 3 & 9 & 16 & 28 & 0 & 4 & 5 & 2 & 5 & 13 \\ 16 & 20 & 0 & 16 & 9 & 1 & 19 & 14 & 16 & 20 & 0 & 4 & 5 & 12 & 0 & 3 & 29 \\ 12 & 3 & 22 & 12 & 16 & 0 & 1 & 12 & 7 & 5 & 2 & 19 & 1 & 9 & 3 & 16 & 27 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior será multiplicada por la izquierda por M en este caso $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

por lo que el producto a realizar es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 5 & 10 & 16 & 19 & 0 & 18 & 22 & 5 & 0 & 4 & 5 & 0 & 14 & 22 & 5 & 20 \\ 21 & 19 & 16 & 0 & 10 & 22 & 9 & 3 & 9 & 16 & 28 & 0 & 4 & 5 & 2 & 5 & 13 \\ 16 & 20 & 0 & 16 & 9 & 1 & 19 & 14 & 16 & 20 & 0 & 4 & 5 & 12 & 0 & 3 & 29 \\ 12 & 3 & 22 & 12 & 16 & 0 & 1 & 12 & 7 & 5 & 2 & 19 & 1 & 9 & 3 & 16 & 27 \end{bmatrix}$$

Al realizar el producto nos queda el mensaje encriptado.

$$\begin{bmatrix} 147 & 146 & 64 & 58 & 100 & 49 & 132 & 110 & 110 & 137 & 62 & 44 & 34 & 93 & 29 & 46 & 218 \\ 26 & 18 & 32 & -6 & 11 & 43 & -1 & -8 & 2 & 12 & 56 & -4 & 3 & -2 & 4 & 7 & -3 \\ 109 & 48 & 122 & 100 & 134 & 22 & 84 & 127 & 50 & 31 & 50 & 77 & 7 & 88 & 99 & 73 & 174 \\ 36 & 29 & 16 & 40 & 43 & -20 & 48 & 59 & 35 & 29 & -22 & 32 & 7 & 42 & 23 & 22 & 92 \end{bmatrix}$$

Esta matriz será enviada como un simple listado de números sin ninguna relación aparente.

147, 146, 64, 58, 100, 49, 132, 110, 110, 137, 62, 44, 34, 93, 29, 46, 218, 26, 18, 32, -6, 11, 43, -1, -8, 2, 12, 56, -4, 3, -2, 4, 7, -3, 109, 48, 122, 100, 134, 22, 84, 127, 50, 31, 50, 77, 7, 88, 99, 73, 174, 36, 29, 16, 40, 43, -20, 48, 59, 35, 29, -22, 32, 7, 42, 23, 22, 92.

Para desencriptar el mensaje, quien lo recibe debe armar la matriz a partir de los datos recibidos (en este caso una matriz de 4 por 17 formando filas al ir ingresando los datos) y multiplicarla por M^{-1} siempre por la izquierda, donde:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{10}{3} & 1 & -\frac{35}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{11}{9} & \frac{13}{3} & -1 & \frac{47}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{10}{3} & 1 & -\frac{35}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{11}{9} & \frac{13}{3} & -1 & \frac{47}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 147 & 146 & 64 & 58 & 100 & 49 & 132 & 110 & 110 & 137 & 62 & 44 & 34 & 93 & 29 & 46 & 218 \\ 26 & 18 & 32 & -6 & 11 & 43 & -1 & -8 & 2 & 12 & 56 & -4 & 3 & -2 & 4 & 7 & -3 \\ 109 & 48 & 122 & 100 & 134 & 22 & 84 & 127 & 50 & 31 & 50 & 77 & 7 & 88 & 99 & 73 & 174 \\ 36 & 29 & 16 & 40 & 43 & -20 & 48 & 59 & 35 & 29 & -22 & 32 & 7 & 42 & 23 & 22 & 92 \end{bmatrix}$$

Al realizar el producto se obtiene como resultado, el mensaje (en este caso, el mensaje que se encriptó al inicio):

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 10 & 16 & 19 & 0 & 18 & 22 & 5 & 0 & 4 & 5 & 0 & 14 & 22 & 5 & 20 \\ 21 & 19 & 16 & 0 & 10 & 22 & 9 & 3 & 9 & 16 & 28 & 0 & 4 & 5 & 2 & 5 & 13 \\ 16 & 20 & 0 & 16 & 9 & 1 & 19 & 14 & 16 & 20 & 0 & 4 & 5 & 12 & 0 & 3 & 29 \\ 12 & 3 & 22 & 12 & 16 & 0 & 1 & 12 & 7 & 5 & 2 & 19 & 1 & 9 & 3 & 16 & 27 \end{bmatrix}$$

Con el ejemplo dado, el estudiante debe ser capaz de desencriptar los siguientes dos mensajes, de los cuales se le proporciona continuación la información necesaria.

Problema 1.a

Desencriptar el siguiente mensaje, usando el procedimiento del ejemplo:

81, 144, 20, 25, 152, 221, 190, 20, 69, 200, 76, 169, 131, 128, 30, 126, 90, 20 96, 20, 100, 37, 88, 49, 136, 33, 27, 116, 139, 132, 35, 76, 166, 52, 114, 85, 126, 23, 84, 115, 42, 77, 21, 98, 42, 115, 40, 57, -21, -50, 121, 151, 92, -98, 6, 82, 47, 61, 135, 48, 6, 52, -17, -84, 70, 3, 8, -85, -52, 12, 116, 46, 24, 60, 36, 52, 46, 74, 116, 28, 42, 20, 108, 10, 20, 126, 60, 42, 22, 92, 42, 142.

Del cual se sabe que la matriz código utilizada es: $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Como se puede observar, la matriz anterior es de 4 filas y 4 columnas, por lo que el mensaje encriptado deberá ordenarse en una matriz de 4 filas y el número de columnas necesario para ordenar todos los datos.

Problema 1.b

Desencriptar el mensaje que se da a continuación en dos partes:

Primera parte

Desencriptar el siguiente mensaje, usando el procedimiento del ejemplo:

-50, -1, -64, -28, -15, -1, -55, -23, -53, -71, -23, -9, -11, -11, -60, -34, -24, -36, -2, -28, -18, -70, 69, 45, 114, 42, 54, 11, 78, 64, 111, 130, 42, 17, 47, 16, 92, 109, 35, 64, 27, 32, 53, 130, 105, 114, 216, 42, 150, 29, 150, 127, 207, 274, 132, 56, 104, 19, 170, 196, 86, 139, 63, 92, 152, 220.

Del cual se sabe que la matriz código utilizada es: $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Como se puede observar, la matriz anterior es de 3 filas y 3 columnas, por lo que el mensaje encriptado deberá ordenarse en una matriz de 3 filas y el número de columnas necesario para ordenar todos los datos.

Segunda parte

-40, 0, -19, -22, -11, -10, -29, -5, -1, -48, -7, -20, 4, -29, -31, -45, -1, -41, -26, 6, -16, -15, -16, 122, 58, 34, 84, 48, 15, 98, 16, 33, 135, 14, 57, 20, 41, 98, 65, 24, 117, 91, 55, 32, 66, 94, 163, 155, 76, 148, 139, 15, 207, 52, 64, 254, 40, 85, 51, 56, 172, 80, 68, 184, 206, 132, 31, 158, 130, 53, 21, 14, 48, 5, 10, 43, 22, -1, 63, 14, 20, 19, 29, 8, 45, 22, 27, 33, 19, 23, 32, 54.

Se sabe que este mensaje fue encriptado con la matriz código $M = \begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pero no se

conocen los valores de las entradas a , b y c , lo que sí se sabe es que la primera palabra del mensaje es (Las). Con la información anterior, usted debe desencriptar ambas partes del mensaje, usando el procedimiento del ejemplo y obteniendo la información siguiente para la matriz código de la primera parte del mensaje:

- Encuentre la matriz inversa de M en términos de a , b , & c
- Con la inversa obtenida, plantee un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a , b , & c , resuelva el sistema para obtener dichos valores.
- Dé la matriz M con los valores obtenidos.
- Multiplique la inversa por de la matriz de 4 filas y el número de columnas necesario, obtenida de los datos que se dan en el enunciado del problema. (Recuerde que al ir llenando la matriz, debe ir formando filas).
- Desencripte el mensaje dado en dos partes sabiendo que los valores a , b , y c son los mismos en las dos matrices código.

Problema 2:

a. Dada $f(x) = \left| \frac{x^2}{x^2 - 4} \right|$

i. Grafique la función para valores de x en el intervalo $[-10, 20]$.

ii. Exprese la integral $\int_{-5}^{\infty} \left| \frac{x^2}{x^2 - 4} \right| dx$ como la suma de varias integrales impropias.

iii. Evalúe a mano las integrales planteadas en el inciso anterior.

- iv. Evalúe $\int_{-5}^{\infty} \left| \frac{x^2}{x^2 - 4} \right| dx$ con ayuda de un sistema computacional (evalúe la integral en la computadora) de manera directa.
- v. Comente acerca de cualquier discrepancia (haga una comparación entre los resultados de los dos incisos anteriores).

Problema 3:

- i. Para $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+x} dx$ encuentre un valor aproximado de la misma, con cuatro cifras decimales, usando el método del Trapecio con $n=22$.
- ii. Para $\int_{-1/2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ encuentre un valor aproximado de la misma, usando el método de Simpson con $n=20$.

Problema 4

Haga uso de cálculo para deducir a mano, las ecuaciones paramétricas del recorrido horizontal y vertical de un objeto que es lanzado sobre un plano horizontal a una velocidad de 5K metros por segundo y con un ángulo de elevación de M grados. Luego plantee y desarrolle los procedimientos necesarios para calcular por medio del software que considere conveniente, lo siguiente:

- i. El tiempo de vuelo del objeto.
- ii. La altura máxima alcanzada.
- iii. Alcance horizontal máximo.
- iv. El recorrido total del objeto (longitud de curva).

Nota: recuerde que la derivada del desplazamiento respecto del tiempo $\frac{ds}{dt} = v(t)$ es la velocidad y que la derivada de la velocidad respecto del tiempo es la aceleración $\frac{dv}{dt} = a$, y como dato, puede usar $g = -10m/s^2$ para fines prácticos.

Nota:

K es la suma de los últimos 5 dígitos del número de carnet de los dos estudiantes y la M como la suma de los 7 dígitos del número de carnet de los dos estudiantes.

Referencias

- a. Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook*, *Matemática y Mathcad*
- b. Álgebra Lineal una introducción moderna. David Poole. CENGAGE Learning, segunda edición.
- c. Calculo" De una variable Sexta edición. James Stewart. CENGAGE Learning, séptima edición.