

Proyecto 1

Fecha de entrega: lunes 21 de septiembre de 2015

Introducción:

El desarrollo de este proyecto deberá realizarse a mano y presentado de acuerdo al reglamento publicado en la página del departamento de matemática (<http://mate.ingenieria.usac.edu.gt>)

Del libro de texto: ECUACIONES DIFERENCIALES con problemas con valores de frontera. Octava edición. Dennis G. Zill, Warren S. Wright.

Desarrollar el proyecto para la sección 7.3

Asesinato en el restaurante Mayfer

Este proyecto se encuentra al inicio del libro de texto, en las páginas amarillas (P17 y P18) después del PREFACIO.

Amanece en el restaurante Mayfair: la luz ámbar de las farolas mezclada con el flash rojo violento de las patrullas de policía comienza a desvanecerse al levantarse un sol anaranjado. La detective Daphne Marlow sale del restaurante sosteniendo una humeante taza de café caliente en una mano y un resumen de las pruebas de la escena del crimen en la otra. Toma asiento en la defensa delantera de su patrulla y comienza a examinar las pruebas.

A las 5:30 a.m. se encontró el cuerpo de Joe D. Wood dentro del refrigerador en el sótano de la cafetería. A las 6:00 llegó el forense y determinó que la temperatura general del cadáver era de 85 grados Fahrenheit. Treinta minutos después el forense midió de nuevo la temperatura corporal. Esta vez la lectura era de 84 grados Fahrenheit. El termostato en el interior del refrigerador indicaba 50 grados Fahrenheit.

Daphne saca un block de notas amarillo y una calculadora manchada con cátsup del asiento delantero de su patrulla y comienza a calcular. Sabe que la ley de enfriamiento de Newton dice que la velocidad a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura T de un cuerpo al tiempo t y la temperatura del ambiente T_m del entorno que rodea el cuerpo. Anota la siguiente ecuación

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \quad t > 0 \quad \text{ecuación (1)}$$

Donde la constante k es una constante de la proporcionalidad, T y T_m se miden en grados Fahrenheit y t es el tiempo medido en horas. Ya que Daphne quiere investigar el pasado utilizando valores positivos del tiempo, decide hacer corresponder a $t = 0$ con las

6:00 horas y así sucesivamente, por ejemplo $t = 4$ son las 2:00 a.m. Después de un par de anotaciones en el block amarillo, Daphne se da cuenta de que con esta convención del tiempo la constante k en la ecuación (1) será *positiva*. Escribe un recordatorio para sí misma de que las 6:30 a.m. son ahora las $t = -\frac{1}{2}$.

Conforme el amanecer fresco y tranquilo da paso a la mañana húmeda de verano. Daphne comienza a sudar y pregunta en voz alta:

-¿Pero que pasa si el cadáver fue trasladado dentro del refrigerador en un débil intento por ocultar el cuerpo? ¿Cómo cambia esto mi cálculo?

Entra en el restaurante y halla el grasoso termostato encima de la caja registradora vacía. Lee: 70 grados Fahrenheit.

-Pero, ¿Cuándo se trasladó el cuerpo? _pregunta Daphne.

Decide dejar la respuesta pendiente por ahora, simplemente hace que h denote el número de horas que el cuerpo ha estado en el refrigerador antes de las 6:00 a.m. Por ejemplo, si $h = 6$ entonces el cuerpo fue trasladado a medianoche.

Daphne voltea una página de su block y comienza a calcular. Conforme su café se enfría rápidamente comienza a hacer su trabajo, se da cuenta que la forma de modelar el cambio de temperatura ambiental causado por el traslado es con la función escalón unitario $U(t)$. Escribe

$$T_m(t) = 50 + 20U(t - h) \quad \text{Ecuación (2)}$$

Y debajo de la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m(t)) \quad \text{Ecuación (3)}$$

La blusa de poliéster de Daphne, manchada de mostaza, comienza a gotear sudor bajo el resplandor del sol. Sudando por el calor y por el ejercicio mental, arranca su patrulla y se dirige al Café Boodle por otra taza de café y un plato rebosante de pastel de carne y huevos fritos. Se instala en su oficina. El intenso aire acondicionado junto con su blusa empapada de sudor, le ponen la piel como la carne de gallina por el rápido enfriamiento. El intenso frío sirve como un recordatorio horripilante de la tragedia que acaba de ocurrir en el restaurante Mayfair.

Mientras espera su desayuno, Daphne toma su block y rápidamente revisa sus cálculos. Luego cuidadosamente construye una tabla que relaciona el tiempo de refrigerador h con la hora de la muerte, mientras come su pastel de carne con sus huevos.

Aleja su plato vacío, Daphne recoge su teléfono celular para hablar con su compañera Marie. Daphne pregunta:

-¿Hay algún sospechoso?

-Si -responde ella-, tenemos tres. La primera es la última ex esposa del Sr. Wood, una bailarina de nombre Twinkles. Fue vista en el Mayfair entre las 5 y las 6 p.m. Discutió con Wood.

-¿A qué hora se fue?

-Un testigo dice que salió a toda prisa un poco después de las seis. El segundo sospechoso es un corredor de apuestas del sur de Filadelfia en el Mafair, que lleva el nombre

de Slim. Slim estuvo allí alrededor de las 10 de la noche y tuvo una conversación cuchicheada con Joe. Nadie escuchó la conversación, pero los testigos dicen que manoteaban mucho, que Slim estaba molesto o algo así.

-¿Alguien lo vio irse?

-Si, salió en silencio a las 11. El tercer sospechoso es el cocinero.

-¿El cocinero?

-Si, el cocinero. De nombre Shorty. La cajera dice que escuchó a Joe ya a Shorty discutir sobre la forma correcta de presentar un plato de escalopas de ternera. Dice que Shorty tomó un descanso inusualmente largo a las 10:30 p.m. Salió indignado cuando el restaurante cerro a las 2.00, supongo que eso explica por qué el lugar era un desastre.

Gran trabajo, compañera. Creo que ya sé cómo llevar el interrogatorio.

Problemas a resolver:

1. Resuelva la ecuación (1), que modela el escenario en el que Joe Wood es asesinado en el refrigerador. Utilice esta solución para calcular la hora de la muerte (recordemos que la temperatura del cuerpo normal vivo es de 98.6 grados Fahrenheit).
2. Use un (SAC) para completar la tabla de Dahpne. En particular, explique por qué grandes valores de h dan la hora de la muerte.

h	<i>Hora en que se trasladó el cuerpo</i>	<i>Hora de la muerte</i>
12	6:00	
11		
10		
9		
8		
7		
6		
5		
4		
3		
2		

3. ¿A quién quiere interrogar Dahpne y por qué?
4. **¿Aún siente curiosidad?** El proceso de cambio de temperatura en un cuerpo muerto se denomina *algor mortis* (*rigor mortis* es el proceso de endurecimiento del cuerpo), y, aunque no está perfectamente descrito por ley de enfriamiento de Newton, este tema está cubierto en la mayoría de los libros de medicina forense. En realidad, el enfriamiento de un cuerpo muerto está determinado por más que solo la ley de Newton. En particular, los procesos químicos que tiene el cuerpo, continúan por varias horas después de la muerte. Estos procesos generan calor y así pueden mantener una temperatura casi constante antes de que comience el decaimiento exponencial debido a la ley de enfriamiento de Newton.

A veces se utiliza una ecuación lineal, conocida como *ecuación de Glaister*, para dar una estimación preliminar del tiempo t a partir de la muerte. La ecuación de Glaister es

$$t = \frac{98.4 - T_0}{1.5} \quad \text{Ecuación (4)}$$

Donde T_0 es la temperatura corporal medida (98.4° F se utiliza aquí para la temperatura corporal normal con vida en lugar de 98.6° F). Aunque no tenemos todas las herramientas para deducir esta ecuación exactamente (los 1.5 grados por hora se determinaron experimentalmente), podemos deducir una ecuación similar mediante una aproximación lineal.

Utilice la ecuación (1) con una condición inicial $T(0) = T_0$ para calcular la ecuación de la tangente a la solución a través del punto $(0, T_0)$. No utilice los valores T_m o k en el inciso 1. Simplemente déjelos como parámetros. Luego, haga $T = 98.4$ y resuelva t , para obtener

$$t = \frac{98.4 - T_0}{k(T_0 - T_m)} \quad \text{Ecuación (5)}$$

Bibliografía:

ECUACIONES DIFERENCIALES con problemas con valores en la frontera. Octava edición.
Dennis Zill Warren S. Wright.