Proyecto No. 2

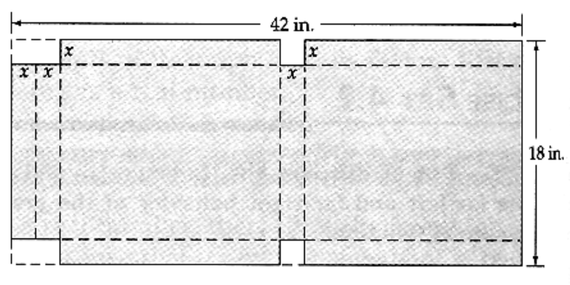
Fecha de entrega: 24 de abril de 2015

Introducción

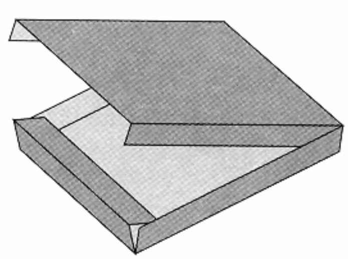
El segundo proyecto del curso Matemática básica 1 ha sido integrado con tres problemas con los cuales se pretende que el estudiante utilice la tecnología en 3 aspectos fundamentales en su formación: resolución de problemas, graficas de funciones polinomiales y racionales y modelación con funciones exponenciales. Los problemas han sido seleccionados de tal forma que la solución de los mismos sin el apoyo de un programa de cómputo es muy difícil, pues los cálculos involucrados requieren matemática avanzada.

Problema 1: El problema de la caja de cartón

Una caja cerrada debe ser construida a partir de una pieza rectangular de cartón que tiene 18 pulgadas de ancho y 42 pulgadas de largo. La caja será hecha cortando dos pequeños rectángulos de longitud $2x$ por altura x en dos de las esquinas y cortando dos cuadrados de lado x en la parte superior e inferior, como se ilustra en la figura siguiente



al doblar el cartón en las líneas punteadas se obtiene la caja que se muestra en la figura siguiente



1.1 Construir una función polinomial $V(x)$ que exprese el volumen de la caja en términos de x.
1.2 Calcule el dominio de ésta función.
1.3 Utilice su programa de cómputo para dibujar la representación gráfica de la función $V(x)$, utilizando un rectángulo de visualización apropiado.
1.4 Haga aproximaciones a la gráfica para estimar el valor de x para el cual el volumen de la caja es 400 pulgadas cúbicas.
1.5 Utilice el comando para resolver ecuaciones y encuentre el valor exacto de x para el cual el volumen es de 400 pulgadas cúbicas.
1.6 Utilice la representación gráfica para estimar el valor de x para el cual el volumen de la caja es máximo. Utilice este valor para estimar el volumen máximo.

Problema 2: Funciones racionales

Una función racional se define como

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales y $Q(x)\neq 0$.

2.1 Las asíntotas horizontales de una función racional están muy relacionadas con el grado de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. El primer inciso de este ejercicio pretende que el estudiante descubra como pueden obtenerse las asíntotas horizontales de una función racional.
Dibuje las representaciones gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un mismo rectángulo de visualización, luego observa detenidamente las gráficas y de una explicación de lo que está observando

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x^2+4x+7}$, $g(x)=2$

b) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^3-8}$, $g(x)=\dfrac{3}{x^2}$

2.2 Las asíntotas verticales de una función racional están muy relacionadas con las raíces del denominador. Dibuje las representaciones gráficas de las funciones racionales dadas. Explique por qué en algunos casos las asíntotas verticales coinciden con los ceros del denominador mientras que en otros casos no ocurre lo mismo.

2.2.1 $f(x)=\dfrac{x^3-x-3}{x^3-2x^2-5x+6}$ 2.2.2 $f(x)=\dfrac{2x(x-4)}{(x+4)(x-4)(x-1)}$

2.3 El comportamiento final de una función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ está muy relacionado con el cociente que resulta de dividir el polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$. Determine si su programa de cómputo dispone de un comando para efectuar la división de polinomios, utilice este comando para expresar las funciones racionales dadas en la forma

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el residuo que resultan de la división. Dibuje la representación gráfica de la función racional $f(x)$ y del cociente $C(x)$ en una misma pantalla. Explique lo que ocurre con el comportamiento final de la función racional en cada caso.

2.3.1 $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x^2+4x+7}$ 2.3.2 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{3x^2}$ 2.3.3 $F(x)=\dfrac{x^3+x^2-14x-24}{x+2}$

Problema 3: Funciones exponenciales como modelos

Latabla siguiente muestra el número de líneas telefónicas instaladas en Guatemala entre los años de 1985 y 1998

Año	No. de líneas
1985	128,179
1986	130,971
1987	132,718
1988	138,222
1989	158,840
1990	190,218
1991	202,209
1992	214,409
1993	231,090
1994	245,094
1995	286,352
1996	358,035
1997	429,712
1998	533,408

3.1 Dibuje la representación gráfica de los datos en un sistema de coordenadas rectangulares, coloque el tiempo en el eje x y el número de líneas en el eje y. La gráfica de los datos muestra que el número de líneas telefónicas crece demasiado rápido en el tiempo para que resulte apropiado construir un modelo lineal. ¡Qué función le sugiere el comportamiento de los datos? Explique.

Un modelo más apropiado para modelar los datos que están relacionados al crecimiento poblacional, es un modelo de la forma

$$G(t) = Ce^{kt}$$

Un método para construir el modelo exponencial anterior para un conjunto de puntos de la forma (t, G), consiste en linealizar los datos. Para hacerlo se debe calcular el logaritmo natural de cada uno de los valores de G que aparecen en la tabla, para obtener puntos de la forma $(t, \ln G)$.

3.2 Utilice su programa de cómputo para construir una tabla que contenga en la columna izquierda el tiempo y en la columna derecha el logaritmo natural del número de líneas telefónicas. Llámele y a los datos linealizados.

3.3 Dibuje una representación gráfica de los datos linealizados, es decir que debe dibujar una gráfica que contenga los puntos de la forma (t, y).

3.4 Con los datos linealizados, utilice el programa para obtener un modelo de regresión lineal que se ajuste a los datos. El modelo obtenido debe tener la forma

$$y = a + kt$$

Dibuje una representación gráfica que contenga los datos linealizados y el modelo lineal obtenido. ¿Se ajustan los datos al modelo lineal? Explique.

Para obtener un modelo exponencial (que es lo que andamos buscando) a partir del modelo lineal que nos ha dado el programa se debe aplicar la función exponencial natural a ambos lados de la ecuación correspondiente al modelo lineal

$$y = a + kt$$

como los valores de y representan el logaritmo natural de los datos originales tenemos que $y = \ln G$. Al aplicar la función exponencial obtenemos

$$\begin{aligned} \ln G &= a + kt \\ e^{\ln G} &= e^{a+kt} \\ G &= e^{a} e^{kt} \end{aligned}$$

como e^{a} es una constante, la podemos sustituir por $C = e^{a}$, obteniéndose el modelo exponencial requerido

$$G(t) = Ce^{kt}$$

3.5 Obtenga el modelo exponencial correspondiente al modelo lineal obtenido en el inciso anterior. Dibuje la representación gráfica de los datos originales y la del modelo exponencial obtenido en una misma pantalla. ¿Cree que el modelo exponencial se ajusta a los datos? Explique.

3.6 Utilice el modelo exponencial para estimar el número de líneas telefónicas que tendrá Guatemala en el año 2018. Consulte en Telgua o en Internet para averiguar el número real de líneas instaladas y compare este dato con la estimación obtenida con el modelo. ¿Qué tan buena ha sido la estimación?

Referencias

[1] Stewart J. Redlin L. Watson S. *Precálculo*. Terceraedición, Thomson Learning.
[2] Aufmann R. Barker V.nation R. *College Algebra and Trigonometry.*Third edition, Houghton Mifflin Company.Boston, New York.
[3] *Guatemala en cifras*. Volumen 1, número 1.1. Edición 1999.
[4] Castillo M. *Instructivo para el uso de los programas Mathematica, Scientific Notebook y Mathcad.* Edición 2003.