PROYECTO No. 2

Fecha de publicación: Jueves 17 de septiembre de 2015 **Entrega: viernes 16 de octubre de 2015**

Grupos de tres personas máximo

Instrucciones:

Continuando con el desarrollo de los proyectos del curso MB1, se presenta a los estudiantes el contenido del proyecto 2. Al resolver los problemas propuestos, el estudiante utilizará un programa de cómputo SAC, entre los cuales se sugiere Mathematica, Scientific Notebook, Geogebra, etc. en la solución de problemas que involucran funciones polinomiales, exponenciales y trigonométricas.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este proyecto se presentan en tres problemas. En el primero de ellos se debe hacer un análisis de la aplicación del Teorema del Valor Intermedio a Polinomiales y analizar una aplicación, en el segundo problema se analizará una aplicación de la función exponencialy en el tercer deben utilizar los datos experimentales y hacer el análisis de un modelo trigonométrico en donde el estudiante demuestra las fórmulas de transformación para la función trigonométrica obtenida, todos estos planteamientos se fundamentan en la teoría de la MB1 y son posibles de plantear gráfica y analíticamente por medio de procesos algebraicos.

Es fundamental aclarar que la primera muestra de cada problema deberá estar escrita a mano, es un requisito indispensable para validar la solución de sus problemas en el proyecto, en caso de no tener las secciones de cálculo algebraico a mano, se les sancionará la sección donde no aparezcan.

PROBLEMA No. 1: PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO: ***Centrarse en un Cero***

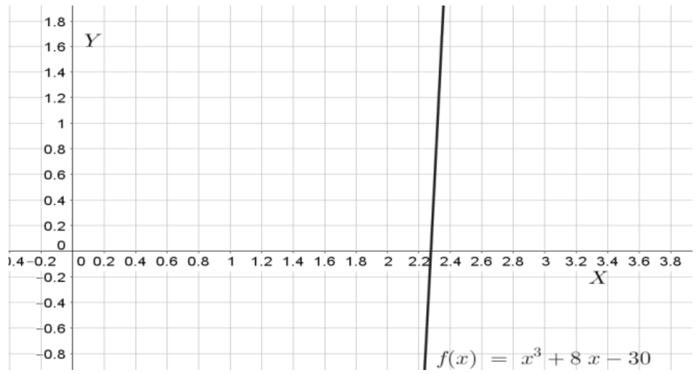
Se ha visto cómo hallar los ceros de un polinomio de manera algebraica o gráfica. Se utiliza un método numérico para hallar los ceros. Con este método se puede hallar el valor de cualquier cero real hasta los decimales que se desee.El teorema del valor intermedio establece: si P es un polinomio y si $P(a)$ y $P(b)$son de signo opuesto, entonces P tiene un cero entre a y b. El teorema del valor intermedio es un ejemplo de un ***teorema de existencia:*** indica que existe un cero, no indica exactamente dónde está. Sin embargo, se puede usar el teorema para centrarse en el cero.

Por ejemplo, considere el polinomio $P(x) = x^3 + 8x - 30$. Observe que $P(2) < 0$ y $P(3) > 0$. Por el teorema del valor intermedio P debe tener un centro entre $x = 2$ y $x = 3$. Para "atrapar" el cero en un intervalo más pequeño, se evalúa P en décimos sucesivos entre 2 y 3 hasta que se encuentra el lugar donde P cambia de signo como se muestra en la tabla 1. En dicha tabla se observa que el cero que se está buscando se ubica entre 2.2 y 2.3 como se muestra en la figura 1.

Tabla 1

x	$P(x)$
2.1	-3.94
2.2	-1.75
2.3	0.57
2.4	3.02

Gráfica 1

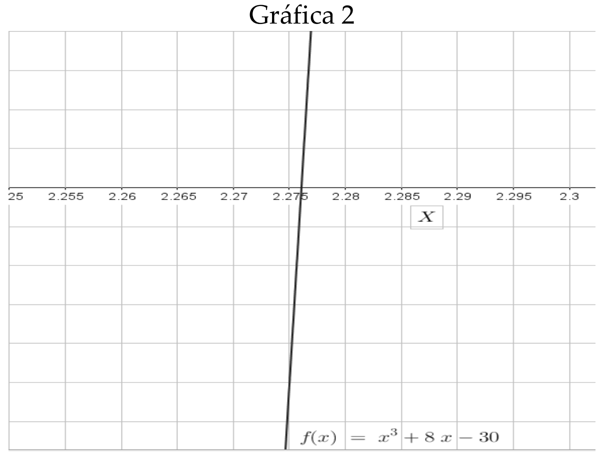


Se puede repetir este proceso evaluando P en centésimos sucesivos entre 2.2 y 2.3, como en la tabla 2. Si este proceso se repite una y otra vez, se puede obtener un valor numérico para el cero de forma tan exacta como se quiera. De la tabla se puede ver que el cero está entre 2.27 y 2.28. Para ver si está más cerca de 2.27 o 2.28, se prueba el valor a la mitad de estos números de donde $P(2.275) \approx -0.03$. Puesto que este valor es negativo, el cero que se está buscando se ubica entre 2.275 y 2.28, como se ilustra en la figura 2.

Tabla 2

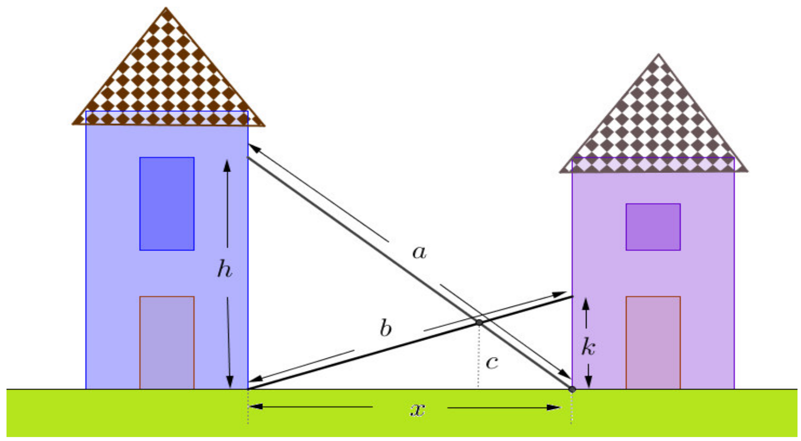
x	$P(x)$
2.26	-0.38
2.27	-0.14
2.28	0.09
2.29	0.32

Gráfica 2



1) Para el siguiente polinomio: $P(x) = x^2 - 2$, resolver los siguientes incisos
   - **a.** Muestre que tiene un cero entre 1 y 2
   - **b.** Encuentre el cero del polinomio hasta el décimo más próximo
   - **c.** Encuentre el cero del polinomio hasta el centésimo más próximo
   - **d.** Encuentre por qué el cero que encontró es una aproximación de $\sqrt{2}$, repita el proceso, hasta encontrar 3 decimales, compare sus resultados.
2) Encuentre un polinomio que tiene $\sqrt[3]{5}$ como un cero. Use el proceso descrito aquí para centrarse en $\sqrt[3]{5}$ hasta cuatro decimales.
3) Muestre que el polinomio tiene un cero entre los enteros dados, y luego céntrese en ese cero, correcto hasta dos decimales.
   - **a.** $P(x) = x^3 + x - 7$; entre 1 y 2
   - **b.** $P(x) = x^3 - x^2 - 5$; entre 2 y 3
   - **c.** $P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$; entre 1 y 2
   - **d.** $P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$; entre -1 y 0

4) Encuentre el cero irracional indicado, correcto hasta dos decimales.
   a. El cero positivo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$
   b. El cero negativo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$
5) En un pasillo entre dos edificios, dos escaleras se apoyan de la base de cada edificio hasta la pared del otro de modo que se cruzan, como se ilustra en la figura.



Si las escaleras tienen longitudes $a = 3$ m y $b = 2$ m y el punto de cruce está a una altura $c = 1$ m, entonces se puede mostrar que la distancia x entre los edificios es una solución de la ecuación: $x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0$

   a. Use un SAC y encuentre las soluciones de la ecuación.
   b. Esta ecuación tiene dos soluciones positivas, que se encuentran entre 1 y 2. Use la técnica de "centrarse en" para hallar ambas soluciones correctas hasta el décimo más próximo.
   c. Dibuje dos diagramas a escala, como en la figura, uno para cada uno de los dos valores de x que encontró en el inciso (a). Mida la altura del punto de cruce en cada uno. ¿qué valor de x es el correcto?
   d. A continuación se escribe a mano, cómo obtener la ecuación anterior.
      i. Use triángulos semejantes y muestre que:
      $$\frac{1}{c} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}$$
      ii. Use el teorema de Pitágoras y reescriba la expresión anterior, como:
      $$\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$
      iii. Sustituya $a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$, luego simplifique usando algebra para obtener la ecuación: $x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0$
      iv. A partir del procedimiento algebraico utilizado en el inciso anterior, explique porque razón una de las soluciones encontradas para analizar en (b) es una solución extraña.

PROBLEMA No. 2: ***Ley de Beer-Lambert.***

Cuando la luz del sol pasa por el agua de lagos y océanos es absorbida, mientras más profundo penetra, disminuye más su intensidad. La intensidad luminosa I a la profundidad x está dada por la ley de Beer-Lambert:

$$I = I_0 e^{-kx}$$

Donde I_0es la intensidad luminosa en la superficie y k es una constante que depende de la turbiedad del agua. Un biólogo utiliza un fotómetro para investigar la penetración en un lago y obtiene los datos de la tabla.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos de la tabla 1 (gráfica Intensidad - profundidad)
b) Use un SAC para hallar la función exponencial de la forma dada por la ley de Beer-Lambert para modelar los datos dados en la tabla. ¿Cuál es la intensidad luminosa I_0 en la superficie en este día y cuál es la constante de "turbiedad" para este lago?
c) Grafique en su diagrama de dispersión del inciso (a)y la función exponencial que encontró en el inciso (b).
d) Si la intensidad luminosa cae por debajo de 0.15 lúmenes (lm), cierta especie de alga no puede sobrevivir debido a que la fotosíntesis es imposible. Use su modelo del inciso (b) para determinar la profundidad debajo de la cual la luz es insuficiente para que esta alga sobreviva.

Tabla 1

Profundidad (pies)	Intensidad luminosa (lm)	Profundidad (pies)	Intensidad luminosa (lm)
5	13.0	25	1.8
10	7.6	30	1.1
15	4.5	35	0.5
20	2.7	40	0.3

PROBLEMA No. 3: ***Modelado de Mareas.***

La profundidad del agua en un canal angosto varía con las mareas. En la tabla 1 se muestra la profundidad del agua en un período de 12 horas.

Tiempo	Profundidad en pies
12:00 am	9.8
1:00 am	11.4
2:00 am	11.6
3:00 am	11.2
4:00 am	9.6
5:00 am	8.5
6:00 am	6.5
7:00 am	5.7
8:00 am	5.4
9:00 am	6.0
10:00 am	7.0
11:00 am	8.6
12:00 pm	10.0

a) Trace una gráfica de dispersión con los datos de profundidad del agua tiempo t (hr) versus altura y (pies) de agua.
b) Encuentre una función que modele la profundidad del agua con respecto al tiempo.
c) Grafique el diagrama de dispersión junto con el modelo encontrado en el inciso (b)
d) Ajuste el modelo a la forma $y = a\cos[\omega(t-c)] + b$ mediante los pasos siguientes:

   i. Ajuste primero el desplazamiento vertical y grafique el nuevo modelo con el diagrama de dispersión
   ii. Ajuste la amplitud y de nuevo grafique el diagrama de dispersión con el modelo encontrado
   iii. Ajuste el período y de nuevo grafique el diagrama de dispersión con el nuevo modelo
   iv. Ajuste el desplazamiento horizontal y grafique el diagrama de dispersión con el modelo final

e) Si una embarcación necesita por lo menos 11 pies de agua para pasar por el canal, ¿En qué momentos lo puede hacer con seguridad? Resuelva la desigualdad $y \geq 11$ y termine el cálculo encontrando el horario que corresponde a los tiempos encontrados en la desigualdad.
f) Investigue cual es el tamaño de 3 posibles embarcaciones que podrían pasar por el canal y los horarios, utilizando el procedimiento del anterior inciso. Recuerde que necesita el calado del barco y un margen adecuado de agua por debajo de él para poder transitar en un canal.