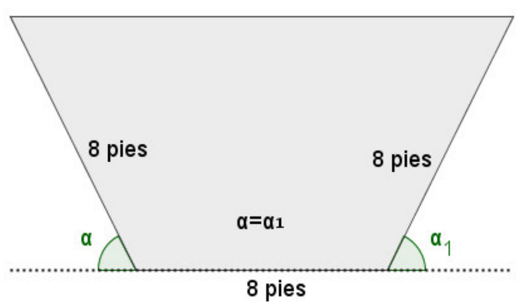
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA　　FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA　　MATEMÁTICA BASICA 2
FECHA DE ENTREGA DE PROYECTO　　MIERCOLES 22 DE ABRIL DE 2015

PROYECTO No. 2

Introducción:

En este proyecto se proponen 3 problemas. En el primero de ellos el estudiante debe obtener el área transversal máxima de un sistema de irrigación, aplicando los principios de la derivada. El segundo problema también se refiere a la aplicación de la derivada en la obtención del ángulo de desviación mínimo en la formación del arcoiris y en el tercer problema el estudiante debe utilizar la definición de integral definida e interpretar el principio de flotación de un objeto relacionado con él área de sección transversal; la importancia de estos problemas radica en que, siguiendo los pasos indicados, el estudiante podrá hacer una demostración de la aplicación del Cálculo Diferencial e Integral a casos reales. Para resolver dichos problemas hay una serie de Sistemas de Computación, pero de preferencia utilizar el Mathematica.



Problema No. 1: Aplicación de la Derivada, análisis numérico, gráfico y analítico

La sección transversal de un canal de irrigación es un trapezoide isósceles cuyos tres lados tienen 8 pies de largo, como se ve en la figura. Realizando lo siguiente, determine el ángulo de elevación α de los lados con los que el área de la sección transversal es un máximo.

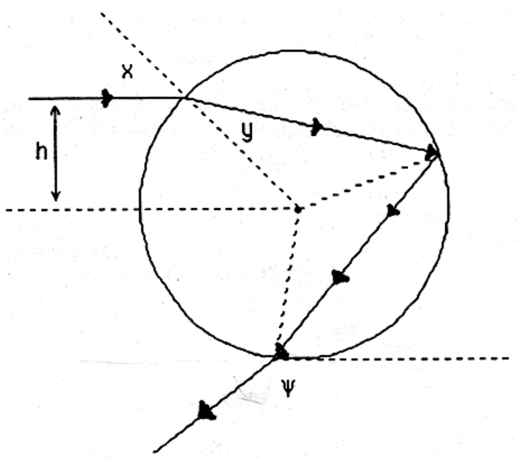
1. Deduzca una ecuación para cada una de las variables que conforman el área de un trapecio y una ecuación para el área del trapecio en función del ángulo α y las ecuaciones encontradas.
2. Complete seis renglones de la siguiente tabla, para los cuales se da el primer renglón.Emplee un SAC para generar más renglones de la tabla, y estime el área máxima de la sección transversal.

Base 1	Base 2	Altura	Área
8	8 + 16 cos 10˚	8 sen 10˚	= 22.1
8	8+16 cos 20˚	8 sen 20˚	= 42.5

3. Haga una gráfica de la función área en términos de α, estime el valor máximo del área y de α, con la gráfica.
4. Use cálculo diferencial para encontrar el número crítico de la derivada de la función de área, así como el ángulo en el cual se encontrará el área máxima de la sección transversal.
5. Haga una comparación de los resultados encontrados en la tabla, en la gráfica y en el cálculo analítico de los valores de la sección transversal del canal de irrigación y el ángulo. Explique si hay alguna diferencia y porque se da dicha diferencia.

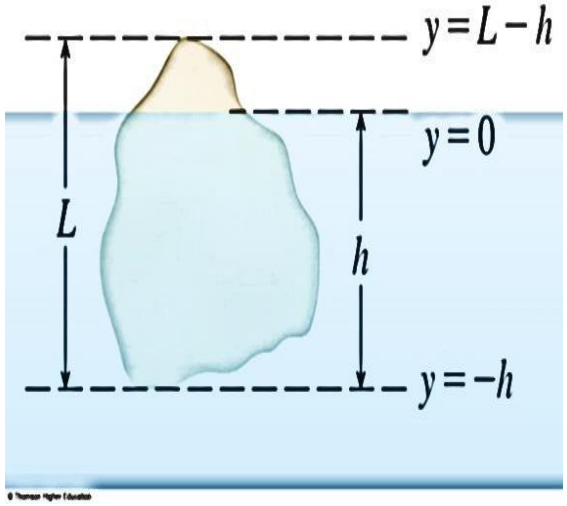
Problema No. 2: La Formación del Arcoiris

El arco iris se forma cuando la luz del Sol atraviesa las gotas de lluvia, sufriendo reflexión y refracción, como se muestra en la figura (en la que se ve una sección de gota esférica). Un rayo de luz sigue la trayectoria indicada con las líneas con flecha.



La ley de refracción de la luz establece que cuando un rayo de luz penetra en la gota de agua con un ángulo de inclinación x con respecto a una perpendicular a la superficie de la gota de agua, el rayo de luz es desviado un ángulo y con respecto a la misma línea perpendicular. La ley refracción también establece que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = k$, donde $k \approx 1.33$ para una gota de agua.

1) Muestre que el ángulo de desviación Ψ está dado por
$$\Psi = \pi + 2x - 4\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} x\right)$$
2) Dibuje la representación gráfica de la función $\Psi(x)$ para $0 \le x \le \pi$, con $k \approx 1.33$
3) Utilice su programa de cómputo para calcular $\Psi'(x)$.
4) Probar que el ángulo de desviación mínimo ocurre cuando $\cos x = \sqrt{\dfrac{k^2 - 1}{3}}$
5) Para el agua, ¿Cuál es el ángulo de desviación mínimo?
6) El ángulo $\theta = \pi - D_{\min}$ recibe el nombre de ángulo del arco iris. ¿Qué valor de x produce un valor de θ mínimo? Un rayo que atraviesa una gota de agua con el valor de θ mínimo se llama rayo del arco iris.



Problema 3: Fuerza de Flotación

El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación de un objeto parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido que el objeto desaloja. Por lo tanto, en el caso de un objeto de densidad ρ_0, que flota parcialmente sumergido en un líquido de densidad ρ_f la fuerza de flotación es $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A_{(y)} dy$ donde g es la aceleración debido a la gravedad y $A_{(y)}$ es el área de una sección transversal representativa del objeto. El peso del objeto se representa mediante.

$$W = \rho_o g \int_{-h}^{L-h} A_{(y)} dy$$

a) Demuestre que el porcentaje del volumen del objeto por arriba de la superficie del líquido es

$$\mathbf{100}\frac{\boldsymbol{\rho_f - \rho_0}}{\boldsymbol{\rho_f}}$$

b) La densidad del hielo es de 917 kg/m^3 y la densidad del agua de mar es de 1030 kg/m^3. ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg sobresale del agua

c) Un cubo de hielo flota en un vaso lleno hasta el borde con agua ¿Se derramará el agua cuando se funda el cubo de hielo?

d) Una esfera de radio 0.4 m y de peso insignificante flota en un lago enorme de agua dulce. ¿Qué tanto trabajo se requiere para sumergir del todo a la esfera? Si la densidad del agua es de 1000 kg/m^3.

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo: trascendentes tempranas, Septima edición. Thomson- Learning editores.
[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook, Matemáticay Mathcad*
[3] Edwards y Peney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.
[4] Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. Calculo. Octava Edición. CENGAGE, Learning.
[5] http://mate.ingenieria.usac.edu.gt