PROYECTO No. 2

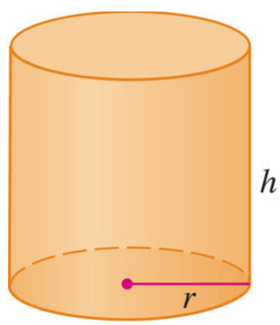
Introducción:

En este proyecto se proponen 3 problemas. En el primero de ellos el estudiante debe obtener el área superficial mínima de una lata, bajo ciertas condiciones de cálculo desarrollado por incisos. El segundo problema se refiere a la construcción de un cono de papel, aplicando los principios de la derivada. El tercer y último problema el estudiante debe utilizar la definición de integral definida e interpretar el principio de flotación de un objeto relacionado con él área de sección transversal; la importancia de este problema radica en que, siguiendo los pasos indicados, el estudiante podrá hacer una demostración de la aplicación de la integral a procesos reales.

Problema No. 1: Forma de una Lata

En este proyecto se investiga el modo más económico de formar una lata. En primer lugar, esto significa que se da el volumen V de una lata cilíndrica y necesita hallar la altura h y el radio r que minimizan el costo del metal para fabricarla, véase la Figura No.1. Si hace caso omiso de cualquier desecho de metal en el proceso de fabricación, el problema es minimizar el área superficial del cilindro.

Figura No. 1



1. Plantee los cálculos necesarios encontrar una la relación entre la altura h y el radio r que minimicen el costo del metal de una lata cilíndrica utilizando principios de derivación.

2. Si usted va a un supermercado descubrirá que la relación establecida en el inciso 1, no se cumple, ya que al medir las latas hay diferentes relaciones entre la altura h y el radio r, mida por lo menos 10 latas y verifique la relación h/r, vera que varía desde 2 hasta 3.8,de una explicación este fenómeno.

3. El material para las latas se corta de láminas metálicas. Los costados cilíndricos se forman al doblar rectángulos; estos rectángulos se cortan de la hoja con poco o ningún desperdicio. Pero si los discos: superior y del fondo se cortan a partir de cuadrados de lado $2r$ como se muestra en la Figura No. 2, esto genera una cantidad de metal de desecho considerable, el cual puede reciclarse pero que tiene poco o ningún valor para quienes fabrican latas. Si éste es el caso, demuestre que se minimiza la cantidad de metal usado cuando:

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} = 2.55$$

Figura No. 2

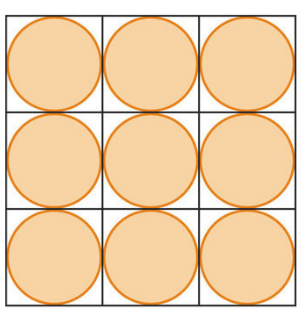
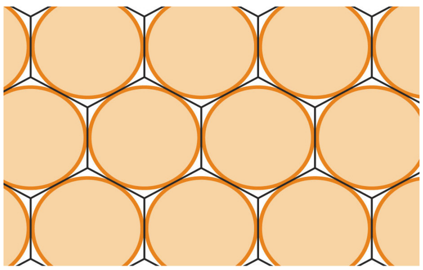


Figura No. 3



4. Se obtiene un apiñamiento más eficiente de los discos dividiendo la hoja metálica en hexágonos y luego cortar las tapas y bases circulares a partir de ellos como se muestra en la Figura No. 3. Demuestre qué si se adopta esta estrategia, en tal caso

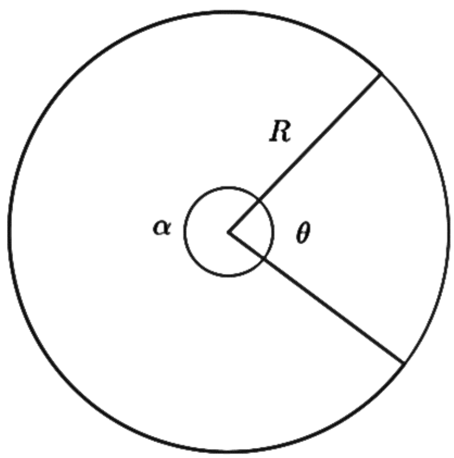
$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} = 2.21$$

Figura No. 4

5. Los valores de $\left({}^{h}/_{r}\right)$ que se encontraron en los problemas 3 y 4 están un poco más cercanos a los que se encuentran en los anaqueles del supermercado, pero todavía no toman en cuenta todo. Si mira con más atención algunas latas reales, la tapa y la base se forman a partir de discos con radios más grandes que r, los cuales se doblan sobre los extremos de la lata. Si toma en cuenta esto, incrementa$\left({}^{h}/_{r}\right)$
Lo que es más significativo, además del costo del metal, necesita incorporar la fabricación de la lata al costo. Suponga que se incurre en la mayor parte del desembolso al unir los costados a los bordes de las latas. Si corta los discos a partir de hexágonos, como en el problema en (4), después el costo es proporcional a:
$$4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$
Donde k es el recíproco de la longitud que se puede unir para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando:
$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}}\left(\frac{2\pi - {}^{h}/_{r}}{\pi {}^{h}/_{r} - 4\sqrt{3}}\right)$$

6. En una computadora trace $\frac{\sqrt[3]{V}}{k}$ como función de $x = {}^{h}/_{r}$y úsela para argumentar de cómo debe ser una lata para que al realizar una unión sea más barato. Será que ${}^{h}/_{r}$sea aproximadamente **2.21, *observe*** y luego argumente si al acercarse a ${}^{h}/_{r}$ a ***2.55*** y se hace más pequeña, el costo es apreciablemente mayor.
7. Con los datos recopilados del supermercado, haga una conclusión acerca del costo respecto de las formas de latas monitoreadas en los supermercados, de donde se observa la forma relativa de las diferentes latas. ¿Puede sugerir las razones de las formas encontradas

Problema 2: Diseño de un vaso de papel cónico



A un disco de papel de radio 6 centímetros se le corta un sector, con la parte que queda (también un sector) se construye un vaso cónico.

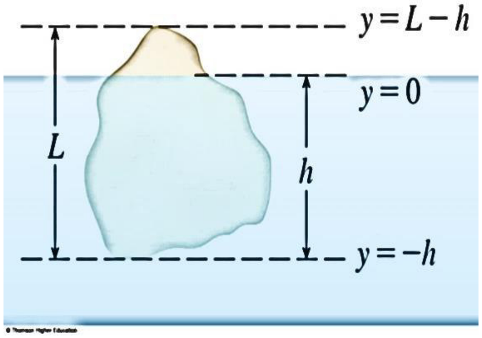
1. Imagine o haga dibujos de sectores cortados y de vasos que se pueden construir con la parte que queda, vea que pasa con el volumen de los vasos cuando el ángulo α de los sectores que quedan toman los valores, 0, 45, 90, 135, 225, 270 y 360 grados.
2. A simple vista, ¿existe un valor de α para el cual se puede construir un vaso de mayor volumen?
3. Considere el volumen de los vasos como una magnitud variable que cambia según varíe el ángulo α. Esboce cualitativamente, la gráfica del volumen del vaso en función de α.
4. Demuestre que el volumen en función de α está dado por:

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}\, R^3$$

5. Encuentre el dominio físico de la función anterior.
6. Determine el valor de α para el cual el volumen del vaso cónico es máximo.
7. Determine el volumen máximo.

Problema 3: Fuerza de Flotación

El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación de un objeto parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido que el objeto desaloja. Por lo tanto, en el caso de un objeto de densidad ρ_0, que flota parcialmente sumergido en un líquido de densidad ρ_f la fuerza de flotación es $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A_{(y)} dy$ donde g es la aceleración debido a la gravedad y $A_{(y)}$ es el área de una sección transversal representativa del objeto. El peso del objeto se representa mediante.



$$W = \rho_o g \int_{-h}^{L-h} A_{(y)} dy$$

a) Demuestre que el porcentaje del volumen del objeto por arriba de la superficie del líquido es

$$100 \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

b) La densidad del hielo es de 917 kg/m^3 y la densidad del agua de mar es de 1030 kg/m^3. ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg sobresale del agua?

c) Un cubo de hielo flota en un vaso lleno hasta el borde con agua ¿Se derramará el agua cuando se funda el cubo de hielo?

d) Una esfera de radio 0.4 m y de peso insignificante flota en un lago enorme de agua dulce. ¿Qué tanto trabajo se requiere para sumergir del todo a la esfera? Si la densidad del agua es de 1000 kg/m^3.

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo: trascendentes tempranas, Sexta edición. Thomson- Learning editores.

[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook*, *Matemáticay Mathcad*

[3] Edwards y Peney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. Calculo. Octava Edición. McGraw Hill.

[5] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt