
Proyecto 2

Fecha de entrega: miércoles 14 de octubre de 2015

Introducción:

El desarrollo de proyectos, es importante en el la formación académica del estudiante ya que le permite interactuar con sus compañeros en la solución de problemas de alta dificultad, que requieren el uso de recursos tecnológicos. Para resolver los problemas, el grupo de estudiantes debe realizar el análisis matemático de los mismos, así como realizar los cálculos utilizando el software que consideren conveniente. Entre los programas que puede utilizar están: Scientific Notebook, Mathematica, Maple, derive, Matlab, etc.

El informe debe ser presentado utilizando un procesador de textos, en cuyo caso deben importarse los resultados del programa matemático o bien editando completamente el informe con el editor que incluyen algunos programas como Scientific Notebook, Mathematica y Maple.

Problema 1: Ecuaciones polares de las cónicas

En 1609 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, con base a enormes cantidades de datos astronómicos, publicó tres leyes del movimiento planetario, de estas, mencionaremos solamente la primera:

Un planeta gira alrededor del Sol en órbita elíptica con el sol en un foco.

Aun cuando Kepler formuló sus leyes en términos del movimiento de planetas alrededor del Sol, aplican bien al movimiento de cometas, satélites y otros cuerpos que giran sujetos a una sola fuerza gravitacional.

Para fines de cálculos astronómicos, es útil expresar la ecuación de una elipse, en términos de su excentricidad e y su semieje mayor a . Se puede escribir la distancia d del foco a la directriz en términos de a si usa:

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Entonces $ed = a(1 - e^2)$, si la directriz es $x = d$.

Entonces la ecuación polar de una elipse con foco en el origen con semieje mayor a y excentricidad e es:

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Las posiciones más cercana y más lejana de un planeta que al Sol, se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse.

Las distancias anteriores están dadas por:

$$\text{Al perihelio: } a(1-e)$$

$$\text{Al afelio: } a(1+e)$$

- 1.1 Utilice un programa de cómputo que tenga la capacidad de dibujar gráficas en coordenadas polares. Para $0 < e < 1$, dibuje simultáneamente las representaciones gráficas para los valores de $e = 0.2, 0, 0.5, 0.8$ manteniendo d fijo en $d = 2$.
- 1.2 Luego dibuje simultáneamente una representación gráfica manteniendo e fijo en $e = 0.5$ y haciendo variar d en $d = 4, 6, 8$. Explique los resultados obtenidos en ambas gráficas. ¿Qué cónica se produce?
- 1.3 Para $e = 1$, dibuje simultáneamente cuando se hace variar el valor de $d = 6, 7, 8$. ¿Qué cónica se obtiene?
- 1.4 Para $e > 1$. Dibuje Simultáneamente la representación gráfica para los valores de $e = 1.5, 3, 6, 8$, manteniendo d fijo en $d = 2$.
- 1.5 Dibuje simultáneamente la representación gráfica para los valores de $d = 1, 3, 5, 6$. y manteniendo e fijo en $e = 2$. ¿Qué cónica se obtiene?
- 1.6 ¿Cómo cambia la gráfica al variar los valores de e y de d ? Explique claramente.
- 1.7 Use los datos de la tabla siguiente para efectuar lo que se le pide En todos los casos el eje polar interseca con la órbita del planeta en el perihelio (la distancia más pequeña al Sol)

| Planeta | Excentricidad e | Semieje mayor (unidades astronómicas) |
|-------------------|-----------------|---------------------------------------|
| <u>HD 69830 a</u> | 0.1 | 0.0785 |
| <u>HD 69830 b</u> | 0.13 | 0.186 |
| <u>HD 69830 c</u> | 0.07 | 0.63 |

Encuentre una ecuación para las órbitas de los planetas HD 69830 a, HD 69830 b y HD 69830 c están dadas respectivamente por las ecuaciones

- 1.8 Dibuje simultáneamente las órbitas de los planetas HD 69830a, HD 69830b y HD 69830c planetas de HD 69830 que es una estrella de tipo G7,5-K0 V de la constelación de Puppis. A su alrededor orbitan tres planetas y un posible cinturón de asteroides. Es el primer sistema planetario extrasolar con una estrella semejante al Sol que no contiene un planeta joviano, "planeta joviano" quiere decir que son planetas similares a Júpiter, es decir, que son gigantes, que están compuestos esencialmente de hidrógeno y helio, y que su densidad es baja. Se toma a Júpiter como referencia, porque es el primer planeta con esas características que nos encontramos.

De los tres planetas descubiertos, el más exterior se encuentra en la llamada "zona habitable" del sistema, es decir, en el rango de distancias a la estrella donde se puede encontrar agua en estado líquido. Los planetas tienen 10, 12 y 18 veces la masa de la Tierra y orbitan alrededor de la estrella con períodos de 9, 32 y 197 días, respectivamente. Fueron descubiertos mediante el espectrógrafo HARPS del telescopio de 3,6 metros del Observatorio de La Silla que forma parte del European Southern Observatory, en el desierto de Atacama (Chile).

Escoja una escala de tal forma que la órbita de HD 69830 c ocupe casi todo el rectángulo de visualización.

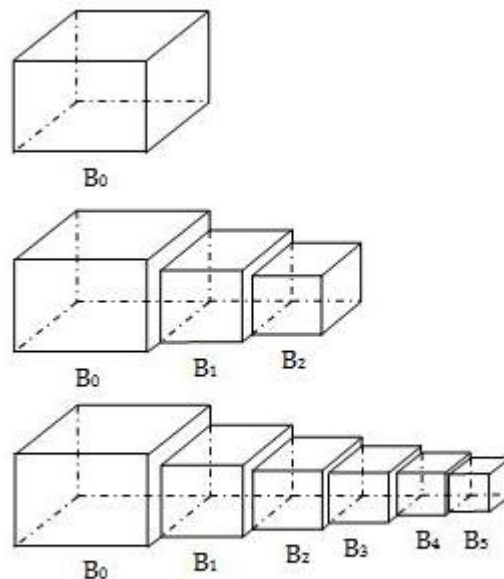
1.9 Calcule los valores correspondientes del perihelio y el afelio de cada uno de los planetas.

1.10 Calcule las distancias que se le indican para cada planeta, según el valor del ángulo θ indicado en la tabla.

| Planeta | Angulo |
|-------------------|--------------------------|
| <u>HD 69830 a</u> | $\theta = \frac{\pi}{6}$ |
| <u>HD 69830 b</u> | $\theta = \frac{\pi}{4}$ |
| <u>HD 69830 c</u> | $\theta = \frac{\pi}{3}$ |

Problema 2: Series

En el gráfico, se muestran algunos cubos de una serie infinita que se genera colocando inicialmente un cubo de lado $B_0 = 10$, justo delante del primero se coloca otro de lado $B_1 = \frac{m}{k} B_0$, delante de este se coloca otro cubo de lado $B_2 = \frac{m}{k} B_1$ de esta manera se siguen colocando una serie infinita de cubos en la que cada siguiente cubo, guarda la misma relación en su lado respecto al tamaño del lado del cubo anterior. Encuentre las relaciones necesarias para plantear las series que le permitan calcular:



GRÁFICO

- 3.1 La suma de todas las diagonales principales de los cubos.
- 3.2 La suma de todas las diagonales de los lados que forman los cubos.
- 3.3 La suma de las áreas de todos los cubos.
- 3.4 La suma de los volúmenes de todos los cubos.

Nota: El valor de m será calculado con la suma del último dígito del carnet de cada miembro del grupo y $k = m + 1$

Referencias

- [1] Stewart J. Cálculo de una variable, cuarta edición. Thomson-Learning editores.
- [2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook*, *Matemática* y *Mathcad*
- [5] <http://mate.ingenieria-usac.edu.gt>
- [6] Referencia: An extrasolar planetary system with three Neptune-mass planets, *Nature*, 18 de mayo de 2006.