Proyecto No. 2

Entrega: Martes 17 de abril de 2018

Introducción:

Continuando con el desarrollo de las actividades del curso MB1, se presenta a los estudiantes el contenido del proyecto 2. Al resolver los problemas propuestos, el estudiante utilizará un sistema algebraico por computadora (SAC) en la solución de problemas que involucran modelado de funciones, funciones, funciones racionales y funciones exponenciales.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este laboratorio se presentan en tres problemas. En el primer problema se refiere a un método para encontrar una función polinomial cuando se conocen algunos puntos de ella. En el segundo problema el estudiante debe realizar un experimento de temperaturas para modelar una función exponencial. El tercer problema se refiere al uso de las funciones trigonométricas inversas en el análisis de los lentes de una cámara fotográfica.

Objetivo:

El principal objetivo de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora (SAC) en la solución de problemas de precálculo.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica.*
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Polinomios de interpolación

Suponga que una curva es descrita por medio de una función desconocida $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ y que es posible obtener, gráficamente, n puntos de la curva en forma de tabla:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0) = a_0$
x_1	$f(x_1) = a_1$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n) = a_n$

En donde $a = x_0, \quad b = x_n$. Es posible describir la función desconocida por medio de un polinomio de grado n con la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Es necesario conocer la constantes apropiadas $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Para ello considere que $a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$, ya que el único término distinto de cero al valuar en $x = x_0$ es a_0. De manera análoga, $P_n(x_1) = f(x_1)$, por lo que al valuar en $x = x_1$, los términos distintos de cero son

$$P_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x - x_0),$$

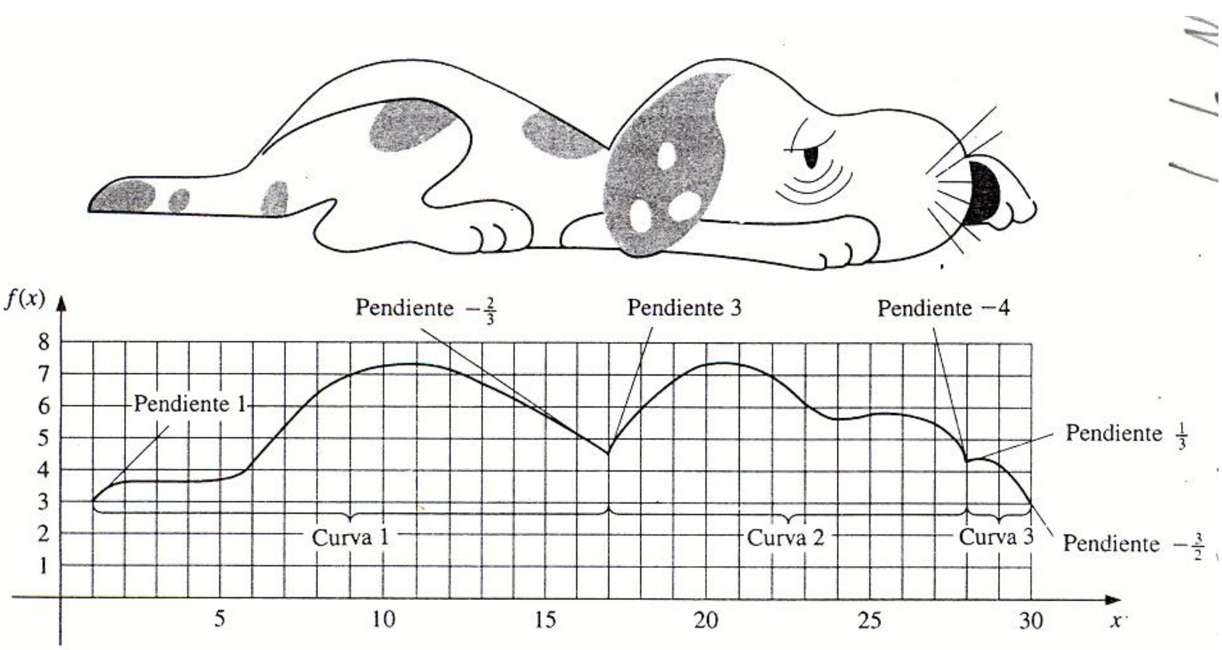
de donde es posible obtener a_1. Si se conoce a_1, se puede hacer,

$$P_n(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

El proceso puede extenderse hasta conocer las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Ahora, véase la figura en donde se muestra una curva arbitraria, que será descrita por medio de varias funciones polinomiales, aunque sea desconocida. Sobre ella, se superpone un sistema de coordenadas para facilitar la aproximación de puntos.

Proceda como sigue:



1.1 Determine el intervalo $[a,b]$ en donde realizará su aproximación. Proponga un número n de puntos separados a intervalos regulares. Es decir, cada punto estará separado una distancia $\Delta x = (a-b)/n$. Si los puntos están muy separados, la aproximación será pobre.

1.2 Aproxime gráficamente los valores $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n)$. El sistema de coordenadas le será de ayuda.

1.3 Con el procedimiento descrito determine las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

1.4 Escriba ahora su polinomio que aproxima la función desconocida. (observe que debe construir 3 polinomios, una para la curva 1, otro para la curva 2 y el tercero para la curva 3)

1.5 Grafique el polinomio encontrado y compare con la gráfica proporcionada.

1.6 Describa en dónde se producen las mayores discrepancias. Encuentre la desviación máxima observada.

1.7 De ser necesario proceda con nuevos puntos para una mejor aproximación.

Problema 2: Modelación exponencial

Al resolver este problema, el estudiante podrá comprobar la Ley del Enfriamiento de Newton experimentalmente. Para realizar este experimento se necesita un termómetro de mercurio en escala de 0 a 100 grados, el cual será utilizado para medir las temperaturas.

Como primer paso utilice el termómetro para medir la temperatura del medio ambiente, llame a esta temperatura T_0.

Ahora coloque un recipiente con un líquido en un horno de micro ondas o en una estufa y caliéntelo hasta que alcance una temperatura que se aproxima a 100 grados. Proceda a medir inmediatamente la temperatura del líquido y repita la medición cada 5 minutos (Si el grupo lo considera conveniente pueden variar el intervalo de tiempo entre medición y medición). Completa la tabla que se muestra a continuación.

t (minutos)	T (°C)
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	
45	
50	

2.1 Utilice un SAC para dibujar la representación gráfica de los datos. ¿Cuál cree que es la función que se ajusta a los mismos.

Un método para obtener modelos exponenciales consiste en linealizar los datos. Supongamos que tenemos un conjunto de datos de la forma (t, T), para linealizar los valores de T calculamos el logaritmo natural de cada uno de los valores en la tabla, para obtener un conjunto de puntos de la forma $(t, \ln T)$.

2.2 Construir una tabla de valores que contenga los dados linealizados, es decir que la tabla debe contener en la primera columna el tiempo y en la segunda columna el logaritmo natural de la temperatura.

2.3 Dibuje la representación gráfica de los datos linealizados, colocando en el eje x el tiempo y en el eje y el logaritmo natural de las temperaturas.

2.4 Con los datos linealizados, utilice su programa de cómputo para obtener un modelo lineal. Es claro que éste modelo debe tener la forma

$$y = \ln T = a + kt$$

2.5 Dibuje una representación gráfica que contenga los datos linealizados y el modelo lineal obtenido. ¿Se ajustan los datos al modelo? Explique.

Para obtener un modelo exponencial a partir del modelo lineal podemos aplicar la función exponencial natural a ambos lados de la ecuación que representa al modelo lineal, es decir

$$\begin{aligned} \ln T &= a + kt \\ e^{\ln T} &= e^{a+kt} \\ T &= e^{a} \cdot e^{kt} \\ T &= Ce^{kt} \end{aligned}$$

donde se ha sustituido la constante $C = e^{a}$

2.6 Trace el modelo exponencial así como los puntos originales en una sola ventana. ¿Se ajusta el modelo a los puntos? ¿explique?

2.7 De acuerdo al modelo ¿Cuál es la temperatura del líquido a los 15 minutos? ¿A los 25 minutos? ¿Coinciden con los valores reales? ¿explique?

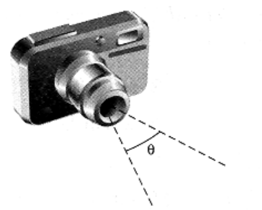
2.8 De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton, después de un intervalo muy grande de tiempo, la temperatura de la taza de café tenderá a la temperatura del ambiente. ¿Puede nuestro modelo exponencial pronosticar esto? ¿explique?

Problema 3: Fotografía

El ángulo de visión cambia con la longitud focal de lente de la cámara fotográfica. Un lente gran angular de 28 mm tiene un ángulo de visión ancho, y un lente de telefoto de 300 mm tiene un ángulo de visión estrecho. Para cierta cámara fotográfica, el ángulo de visión θ, en grados, está dado por

$$\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{21.634}{x}\right)$$

donde x es la longitud focal del lente que se usa.



3.1 Utilice su programa de cómputo para dibujar la representación gráfica de la función anterior para lentes entre 10 mm a 100 mm de longitud.

3.2 Utilice la gráfica anterior para aproximar con dos cifras decimales el ángulo de visión para un lente de 28mm.

3.3 Graficando $\theta = 40°$ y $\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{21.634}{x}\right)$ en una misma pantalla, aproxime con dos cifras decimales la longitud del lente que permite tener un ángulo de visión de 40°, para ello encuentre el punto de intersección de las gráficas realizando las aproximaciones necesarias.

3.4 Utilice su programa de cómputo para resolver la ecuación $40 = 2\tan^{-1}\left(\frac{21.634}{x}\right)$.

Coincide el valor exacto con el valor aproximado que obtuvo en el inciso anterior, de no ser así explique y haga las correcciones necesarias para que los resultados sean aproximadamente los mismos.

3.5 Grafique la función de modo que la gráfica cubra lentes de 100 mm a 1000 mm. Utilice la gráfica para aproximar la longitud focal del lente que podría tener un ángulo de visualización de 10°.

Referencias

[1] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas Mathematica, Scientific Notebbok y Mathcad.

[2] Stewart J. Redlin L. Watson S. Precálculo. 3a. edición. Thomson editores.

[3] Fevereiro, I., do Carmo, M. Changing the classroom practices. The use of technology in mathematics teaching. Proceedings of ICMT5 in Klagenfurt 2001.