Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Matemática Básica 1
Segundo semestre de 2016

Proyecto 2

Entrega: martes 18 de octubre de 2016

Introducción:

Continuando con el desarrollo de las actividades del curso MB1, se presenta a los estudiantes el contenido del proyecto 2. Al resolver los problemas propuestos, el estudiante utilizará su programa de cómputo en la solución de problemas que involucran funciones exponenciales, geometría y funciones trigonométricas.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este proyecto se presentan en tres problemas. En el primero de ellos se debe construir un modelo de una función exponencial, a partir de un conjunto de datos obtenidos experimentalmente. En el segundo problema el estudiante debe utilizar conocimientos de geometría y trigonometría para modelar un polígono de n lados. En el tercer problema el estudiante debe utilizar trigonometría para obtener la función que describe el comportamiento de un sistema masa resorte.

Problema 1: Modelación exponencial

Una taza de café se calienta en un horno de microondas. La taza de café se extrae del horno y se expone al medio ambiente que se encuentra a una temperatura de 20 °C. La siguiente tabla proporciona la temperatura T del café en grados centígrados, con los datos tomados cada 5 minutos.

t (minutos)	T (°C)
5	65.2
10	54.1
15	45.7
20	39.3
25	34.6
30	31.0
35	28.3
40	26.2
45	24.6
50	23.5

1. Utilice un SAC para dibujar la representación gráfica de los datos. ¿Cuál cree que es la función que se ajusta a los datos?

2. Utilice un SAC para linealizar los puntos. (consulte el manual del laboratorio para obtener información sobre la linealización de datos)

3. Utilice un SAC para construir un modelo lineal para los puntos una vez linealizados.

4. Utilice un SAC para trazar tanto los puntos linealizados así como el modelo lineal en una sola ventana. ¿Se ajusta el modelo lineal a los puntos linealizados? ¿Por qué?

5. A partir del modelo lineal construya un modelo exponencial.

6. Trace el modelo exponencial así como los puntos originales en una sola ventana. ¿Se ajusta el modelo a los puntos? ¿Por qué?

7. De acuerdo al modelo ¿Cuál es la temperatura de la taza de café a los 25 minutos? ¿A los 40 minutos? ¿Coinciden con los valores reales? ¿Por qué?

8. De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton, después de un intervalo muy grande de tiempo, la temperatura de la taza de café tenderá a la temperatura del ambiente. ¿Puede nuestro modelo exponencial pronosticar esto? ¿Porqué?

Problema 2: El polígono de *n* lados

Un $n-$ágono es un polígono con n lados iguales. Imagine que uno de éstos polígonos se encuentra inscrito en un círculo de radio 1. Dos son los objetivos que se persiguen al resolver este problema, el primero: ¿Cómo pueden establecerse analíticamente las coordenadas de los vértices de cada uno de estos polígonos, a fin de que su trazo sea fácil? y segundo: ¿Cuál es el área de cada uno de éstos polígonos en función de su número de lados?

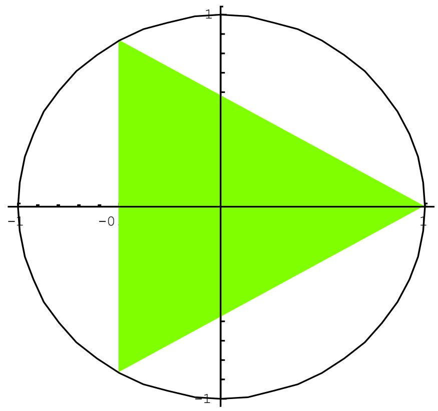
Para responder a éstas preguntas será necesario primero establecer algunas relaciones geométricas y trigonométricas que existen entre dichos polígonos y el círculo. Este estudio comienza recordando algunas propiedades del círculo unitario.

Coordenadas de los puntos sobre el círculo unitario

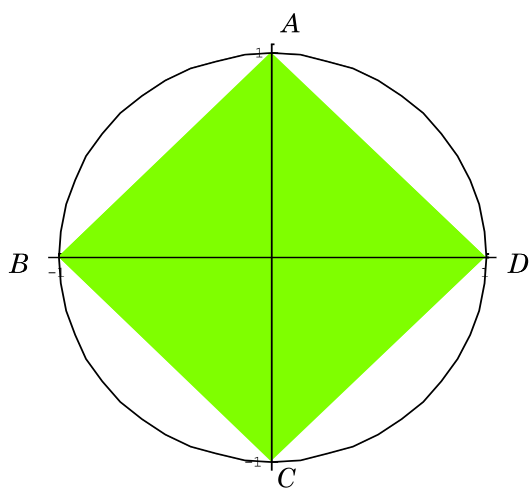
Cualquier punto $P(x,y)$ sobre el círculo unitario tiene como coordenadas $x=\cos\theta$ y $y=\sin\theta$, donde θ es un ángulo con lado inicial en el eje x y lado terminal en el punto. Así por ejemplo, el punto $P(0,1)$, corresponde a $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ y tiene coordenadas $(\cos\frac{\pi}{2},\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})$.

1. Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo equilátero (polígono de 3 lados) inscrito en un círculo de radio 1 mostrado en la figura. Observe que los ángulos se generan con la expresión $\theta=\dfrac{2\pi k}{3},\quad k=1,2,3$

2. Construya una fórmula para el área del triángulo equilátero como la suma de las áreas de 3 triángulos iguales, utilice las coordenadas de los vértices.



3. Encuentre las coordenadas del cuadrado inscrito en un círculo de radio 1 mostrado en la figura siguiente. Observe que los ángulos se generan con la expresión $\theta = \dfrac{2\pi k}{4}, \quad k = 1,2,3,4$



4. Obtenga una fórmula para el área del cuadrado como la suma de las áreas de 4 triángulos iguales, utilizando las coordenadas de los vértices.

Un $n-$ágono es un polígono formado por n triángulos isósceles, donde dos de los lados del isósceles tienen longitud igual al radio del círculo.

El ángulo comprendido entre estos dos lados es proporcional al número de lados que tiene el $n-$ágono.

Las coordenadas de los vértices del $n-$ágono son de la forma $x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}k\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{n}k\right)$ con $1 \le k \le n$.

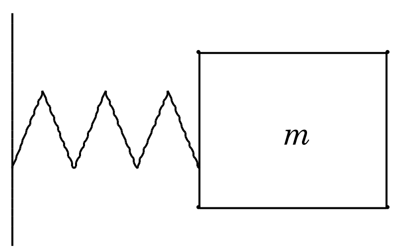
5. Construya una fórmula $A(n)$ para el área de un $n-$ ágono que se inscribe en un círculo de radio 1 (una unidad lineal), en términos de n, para $n \geq 3$.
6. Calcule $A(3)$, $A(4)$ y $A(6)$. Compruebe sus respuestas empleando las fórmulas directas que existen para el área de un cuadrado, un triángulo equilátero y un hexágono que se inscriben en un círculo de radio 1.
7. Utilice un SAC para trazar un $n-$ ágono que se inscribe en un círculo unitario, para los casos $n=3, n=4, n=5$ y $n=6$. Dibuje cada caso en ventanas diferentes y muestre también el círculo.
8. Utilice el programa ***MATHEMATICA*** para trazar un $n-$ ágono con $n=15$, así como un círculo unitario, en la misma ventana. Para ello, puede emplear el comando

```
Show[Graphics[{Hue[c],Polygon[{{x0,y0},{x1,y1},{x2,y2},...,{xn,yn}}] }]]
```

Ayuda: Utilice otro comando que genere las coordenadas de los quince puntos, para no tener que escribirlos. Además $0 \leq c \leq 1$.

Problema 3: Un sistema masa - resorte

Un sistema masa – resorte está formado por una masa m (en kilogramos) sujeta a un resorte cuya constante de proporcionalidad es k (en N/m).



Si en $t=0$ segundos, la posición de la masa es s (en metros) y su velocidad es v (en metros por segundo), la función de posición $x(t)$ (en metros) para dicha masa en cualquier instante t viene dada por

$$x(t) = s\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + v\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

1. Construya una función de posición para un sistemas masa resorte con $m=1$ kilogramo, $k=4$ N/m, $s=1$ m y $v=1$ m/s.
2. Utilice un SAC para trazar la gráfica de la función anterior, durante los primeros 10 segundos en que se pone en movimiento la masa.
3. Exprese la función del inciso 1 de la forma $C\cos(wt-\varphi)$.

4. Utilice un SAC para Dibujar las gráficas del inciso 1 y del inciso 3 en una misma ventana.

5. Utilice un SAC para determinar la amplitud, el período y el desfase de la función anterior.

6. En la gráfica de un sistema masa – resorte al eje horizontal t se le llama eje de la posición de equilibrio. Utilice un SAC para aproximar ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio (corta al eje t) por primera vez. ¿Cómo puede determinarse analíticamente este valor?

Referencias

[1] **Castillo Miguel**. *Instructivo para el uso de los Programas Mathematica, Scientific Notebbok y Mathcad*.

[2] **Stewart J. Redlin L. Watson S**. *Precálculo. 3a. edición*. Thomson editores.

[3] **Fevereiro, I., do Carmo, M**. *Changing the classroom practices- The use of technology in mathematics teaching*. Technology in Mathematics Teaching. Proceedings of ICMT5 in Klagenfurt 2001.