Proyecto No. 2

Entrega: lunes 30 de octubre

Introducción:

Continuando con el desarrollo de las actividades del curso MB1, se presenta a los estudiantes el contenido del proyecto 2. Al resolver los problemas propuestos, el estudiante utilizará un sistema algebraico por computadora (SAC) en la solución de problemas que involucran modelado de funciones, funciones, funciones racionales y funciones exponenciales.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este laboratorio se presentan en tres problemas. En el primer problema se refiere a un método numérico para encontrar en forma aproximada las soluciones de un polinomio. En el segundo problema el estudiante debe analizar como las funciones trigonométricas se pueden utilizar para modelar un problema depredador presa. El tercer problema, consiste en una aplicación de las secciones cónicas en el diseño de puentes.

Objetivo:

El principal objetivo de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora (SAC) en la solución de problemas de precálculo.

Instrucciones:

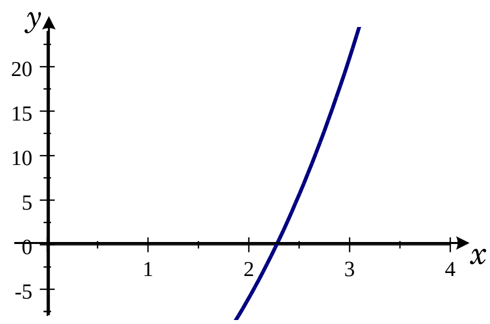
1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica.*
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Aproximación de soluciones de polinomios

En este problema el estudiante utilizará un método numérico para encontrar en forma aproximada la raíz de un polinomio.

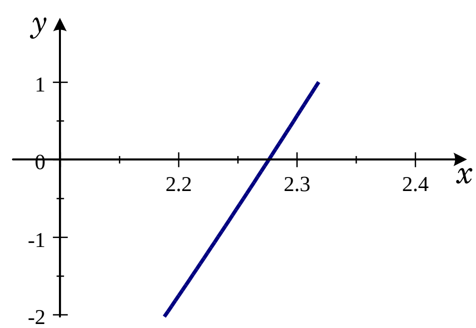
El Teorema del Valor Intermedio indica: Si P es un polinomio y si $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces P tiene al menos un cero entre a y b. El teorema del valor es un ejemplo de un teorema de la existencia, nos dice que un cero existe, pero no nos dice exactamente dónde está. Sin embargo, podemos usar el teorema para encontrar los ceros.

Por ejemplo, considere el polinomio $P(x) = x^3 + 8x - 30$. Al evaluar el polinomio en 2 y en 3 se obtiene que $P(2) = -6$ y $P(3) = 21$. Por el Teorema de Valor Intermedio P debe tener un cero entre 2 y 3, como se ilustra en la figura siguiente.



Para capturar el cero en un intervalo más pequeño, evaluamos P en sucesivas

décimas entre 2 y 3 hasta que encontramos donde P cambia de signo, encontrando que el cero que estamos buscando está entre 2.2 y 2.3 ya que $P(2.2) = -1.75$ y $P(2.3) = 0.57$, como se muestra en la Figura siguiente



El procedimiento se puede repetir tantas veces como sea necesario, hasta encontrar el cero con la cantidad de decimales que sean requeridos.

1. Muestre que el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$ tiene una raíz entre 1 y 2.

2. Utilice el procedimiento descrito para encontrar la raíz irracional con 3 decimales exactos.

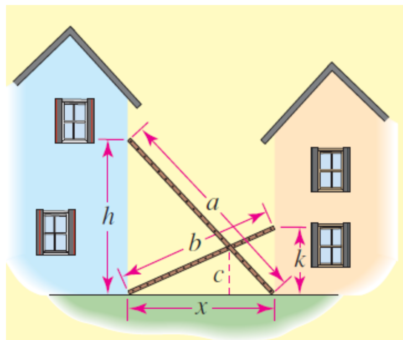
3. Encuentre los ceros del polinomio utilizando división sintética. Compare la raíz encontrada numéricamente con el valor exacto.

4. Obtenga la raíz irracional positiva con dos decimales exactos para el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$$

5. obtenga la raíz irracional negativa con dos decimales exactos para el polinomio anterior.

6. En un pasadizo entre dos edificios, dos escaleras están apoyadas desde la base de cada edificio a la pared de la otro edificio para que se crucen, como se muestra en la figura.



6.1 Utilice triángulos semejantes para obtener que

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}$$

6.2 Utilice el teorema de Pitágoras para obtener que

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

6.3 Si las escaleras tienen longitudes de $a = 3$ m. Las escaleras se cruzan a una altura $c = 1$ m, entonces. Demuestre que la distancia x entre los edificios es una solución de la ecuación

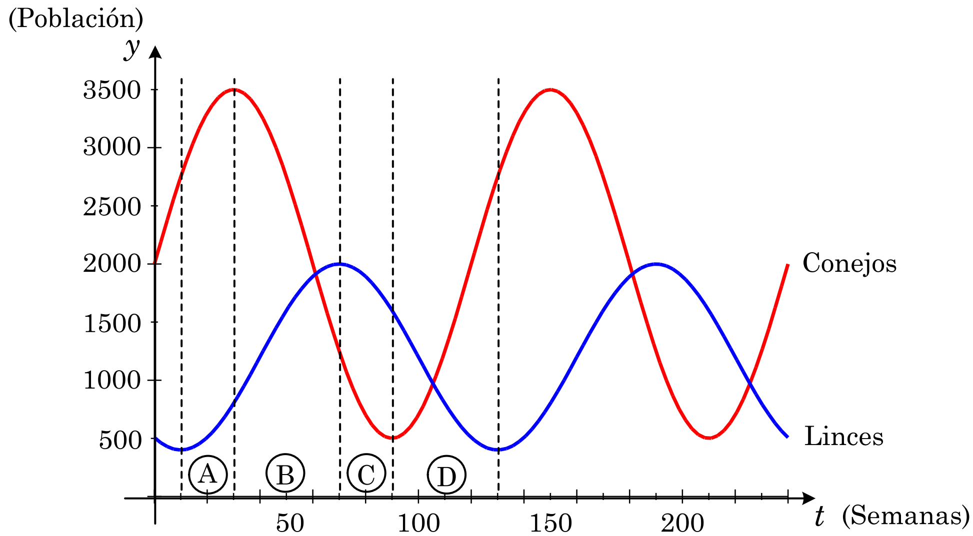
$$x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0$$

6.4 Utilice el método numérico mostrado en este problema para encontrar la distancia x entre los dos edificios (2 soluciones)

Problema 2: Depredador presa

Considere una aplicación de las funciones trigonométricas a la biología usando funciones seno y coseno para modelar la población de un depredador y su presa.

Una isla está habitada por dos especies de mamíferos: el lince y los conejos. Los lince son depredadores que se alimentan de los conejos, sus presas. Las poblaciones cambian cíclicamente, tal como se ilustra en la Figura siguiente.



En la parte A de la gráfica, los conejos son abundantes, por lo que el lince tiene mucho que comer y su población aumenta. En el tiempo descrito en la parte B, tantos linces se alimentan de los conejos que la que disminuye de la población de conejos. En la parte C, la población de conejos ha disminuido tanto que no hay suficiente comida para el lince, por lo que la población de lince comienza a disminuir. En la parte D, tantos linces han muerto que los conejos tienen pocos enemigos, y su población aumenta de nuevo. Esto nos lleva de nuevo a donde empezamos, y el ciclo se repite una y otra vez.

Las gráficas de la figura 1 son curvas senoidales que han sido desplazadas hacia arriba, de modo que son gráficas de funciones de la forma $y = a\,\text{sen}[bt + c)] + d$. Donde d es la cantidad que la curva senoidal se ha desplazado verticalmente. Obsérvese que d es el valor medio de la función, a medio camino entre los valores más alto y más bajo en la gráfica. La amplitud $|a|$ es la cantidad por la cual la gráfica varía por encima y por debajo del valor medio.

1. Encuentre las funciones de la forma

$$y = a\,\text{sen}[bt + c)] + d$$

que modelan las poblaciones de linces y conejos en el tiempo t

2. Grafique ambas funciones en un sistema de coordenadas rectangulares utilizando un SAC. Compare sus resultados con la gráfica que se muestra.

3. Encuentre el número de semanas en el cual la población de conejos es igual a la población de linces.

4. Sume las funciones de población de lince y conejos para obtener una nueva función que modele la población total de animales en esta isla. Grafique esta función utilizando un SAC.

5. Encuentre su valor medio, amplitud, período y desplazamiento de fase.

6. ¿Cómo se relacionan el valor promedio y el período de la función de la población de total, con los períodos y valores promedio de las poblaciones de linces y conejos?

7. Un pequeño lago contiene dos especies de peces: merluzas y salmóm. Las merluzas son los depredadores que comen el salmón. La población de peces en el lago varía periódicamente con un período de 180 días. El número de merluza varía entre 500 y 1500, y el número de salmones varía entre 1000 y 3000.

La merluza llega a su población máxima 30 días después de que el salmón alcanza su población máxima en el ciclo.

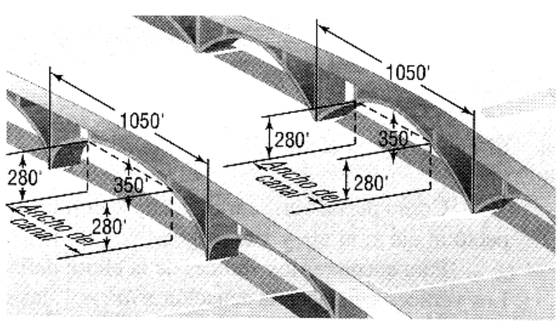
7.1 Dibuje un gráfico (como el de la Figura) que muestre dos períodos de ciclo poblacional de estas especies de peces. Asumir que $t = 0$ corresponde a un momento en que la población de salmones es máxima.

7.2 Encontrar funciones coseno de la forma $y = a\cos[bt + c)] + d$ que modelan las poblaciones de merluza y la población de salmón en el lago.

Problema 3: Construcción de un puente

Su grupo tiene que analizar dos proyectos de construcción para un nuevo puente sobre un río. El espacio entre los dos soportes del puente será de 1050 pies y la altura en el centro del arco será de 350 pies. Una compañía constructora ha sugerido que la estructura tenga la forma de una elipse, mientras que la otra empresa que ofrece la construcción del puente propone que el arco tenga forma de una parábola. El trabajo de su grupo consiste en elegir el proyecto más apropiado.

Un barco petrolero necesita un espacio de 280 pies de altura para poder circular sin dificultad por debajo del puente.



3.1 Eligiendo el origen del sistema de coordenadas rectangulares en el mismo lugar para ambos casos, encuentre las ecuaciones de la elipse y la parábola para cada propuesta.

3.2 Dibuje en un mismo rectángulo de visualización las representaciones gráficas de la parábola y la elipse. Observando las gráficas, ¿Qué diseño le parece más apropiado? Explique.

3.3 En cada propuesta, calcule el mayor ancho de un barco que pueda pasar por debajo del canal. Según este otro punto de vista. ¿Que diseño le parece más apropiado? Explique.

3.4 Durante la época lluviosa el río aumenta su altura, de estudios anteriores se sabe que cuando mucho la altura se elevará 10 pies. Considerando este último aspecto, ¿Qué diseño resulta más apropiado? Explique. ¿Cuál será ahora el mayor ancho del barco que puede pasar bajo el puente en cada diseño?

Referencias

[1] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas Mathematica, Scientific Notebbok y Mathcad.

[2] Stewart J. Redlin L. Watson S. Precálculo. 3a. edición. Thomson editores.

[3] Fevereiro, I., do Carmo, M. Changing the classroom practices. The use of technology in mathematics teaching. Proceedings of ICMT5 in Klagenfurt 2001.