Proyecto No. 2

Entrega: viernes 26 de octubre

Introducción:

Continuando con el desarrollo de las actividades del curso MB1, se presenta a los estudiantes el contenido del proyecto 2. Al resolver los problemas propuestos, el estudiante utilizará un sistema algebraico por computadora (SAC) en la solución de problemas que involucran modelado de funciones, funciones, funciones cuadráticas y funciones trigonométricas.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este laboratorio se presentan en tres problemas. En el primer problema se refiere a un método experimental para obtener la Ley de Torricelli. En el segundo problema el estudiante debe analizar como la composición de funciones es utilizada para modelar el comportamiento de poblaciones. El tercer problema, consiste en el uso de las funciones trigonométricas para la modelación de funciones armónicas.

Objetivo:

El principal objetivo de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora (SAC) en la solución de problemas de precálculo.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica.*
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Ley de Toricelli

El objetivo de este problema es obtener una expresión para la ley de Torricelli ajustando una función cuadrática a los datos obtenidos de un experimento simple.

Evangelista Torricelli (1608 ─ 1647) era un matemático y un científico italiano. Es más conocido por su invención del barómetro. En el tiempo de Torricelli se sabía que las bombas de succión eran capaces de elevar el agua a un límite de unos 9 metros, y no más alto. La explicación en ese momento era que el vacío en la bomba podía soportar el peso de sólo cierta cantidad de agua. Al estudiar este problema, Torricelli pensó en usar mercurio, que es 14 veces más pesado que el agua. Para probar esta teoría, él hizo un tubo onemeter-largo sellado en el extremo superior, lo llenó de mercurio, y lo puso verticalmente en un tazón abierto con mercurio. La columna de mercurio cayó a unos 76 cm, dejando un vacío en la parte superior del tubo. En un impresionante descubrimiento, Torricelli se dio cuenta de que la columna de mercurio se sostiene no por el vacío en la parte superior del tubo, sino más bien por la presión de aire fuera del tubo presionando hacia abajo sobre el mercurio en el tazón. Él escribió: Yo reclamo que la fuerza que impide que el mercurio caiga... viene de fuera del tubo. En la superficie del mercurio que está en el tazón de fuente descansa el peso de una columna de 50 millas de aire. ¿es una sorpresa que... [el mercurio] debe elevarse en una columna lo suficientemente alta como para hacer equilibrio con el peso del aire exterior que lo fuerza? El dispositivo Torricelli hecho fue el primer barómetro para medir la presión del aire.

Otro de los descubrimientos de Torricelli, basado en el mismo principio pero aplicado a la presión del agua, es que la velocidad de un fluido a través de un orificio en la parte inferior de un tanque está relacionada con la altura del líquido en el tanque. La relación precisa se conoce como la ley de Torricelli.

1. Recopilación de los datos

En esta exploración utilizamos materiales fácilmente obtenibles para realizar un experimento y recolectar datos sobre la velocidad del agua que gotea a través de un orificio en la parte inferior de un tanque cilíndrico. Para ello, medimos la altura del agua en el depósito en diferentes momentos.

Usted necesitará: una botella vacía de plástico de al menos 2 litros de refrescos.

Un barreno para taladrar un orificio pequeño de 4 milímetros de diámetro en la parte lateral inferior de la botella

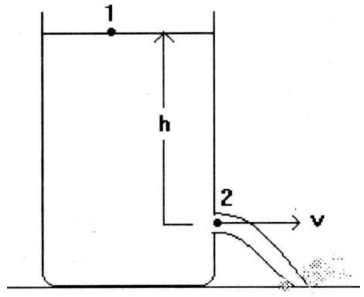
Cinta adhesiva

Una regla métrica o cinta de medir

Un depósito vacío para recibir el agua que saldrá de la botella.

U reloj con cronómetro para medir el tiempo.

1.1 Perfore un orificio de 4 mm cerca del fondo de la parte cilíndrica de una botella de plástico de 2 litros de refrescos. Como se muestra en la siguiente figura



1.2 Fije una tira de cinta adhesiva marcada en centímetros de 0 a 10, con 0 correspondiente a la parte superior del orificio. (En el punto 2 en la figura)

1.3 Con un dedo sobre el orificio, llene la botella con agua hasta la marca de 10 cm. Coloque la botella sobre el balde. Quite el dedo del orificio para permitir que el agua salga libremente. Registre los valores de altura del agua $h(t)$ para

t = 10, 20, 30, 40, 50 y 60 segundos. Completa la tabla siguiente

Tiempo (seg)	Altura (cm)
10	
20	
30	
40	
50	
60	

2. Prueba de la teoría: La ley de Torricelli establece que cuando un fluido se filtra a través de un orificio en la parte inferior de un tanque cilíndrico, la altura h del líquido en el depósito está relacionada con el tiempo t que el fluido ha estado goteando por una función cuadrática

$$h(t) = at^2 + bt + c$$

donde los coeficientes a, b y c dependen del tipo de fluido, del radio del depósito, del radio del orificio y de la altura inicial del fluido.

Utilice su SAC para encontrar la función cuadrática que mejor se adapte a los datos. Grafique la función que encontró junto con un diagrama de dispersión de los datos en el mismo rectángulo de visualización. ¿parece que el gráfico encaja bien con los datos?

3. Otro método: La ley de Torricelli en realidad da más información sobre la forma del modelo de función cuadrática. Puede ser demostrado que la función que define la altura del líquido se puede expresar como

$$h(t) = (c - kt)^2$$

donde los coeficientes c y k dependen del tipo de líquido, de los radios del cilindro y del agujero, y de la altura inicial del líquido. Encontremos c y k para el experimento que llevamos a cabo en la parte 1. Use el hecho de que la altura $h(t)$ del agua es de 10 cm cuando el tiempo $t = 0$ para encontrar c. Utilice la altura $h(t)$ obtenida en el experimento cuando el tiempo $t = 60$ segundos para encontrar el valor de k. Ahora escriba la expresión

$$h(t) = (c - kt)^2$$

Desarrolle el binomio de la expresión anterior y compárelo con el modelo obtenido en forma experimental en el inciso 2.

Problema 2: Iteración y Caos

las iteraciones de la composición de funciones de una función f en $x = x_0$ son $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f(f(f(x_0)))$, y así sucesivamente, lo podemos escribir como:

$x_1 = f(x_0)$ primera iteración

$x_2 = f(f(x_0))$ segunda iteración

$x_3 = f(f(f(x_0)))$ tercera iteración

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces las primeras 3 iteraciones de $x_0 = 2$ son:

$$x_1 = f(2) = (2)^2 = 4$$

$$x_2 = f(4) = (4)^2 = 16$$

$x_3 = f(16) = (16)^2 = 256$ y así sucesivamente.

Las iteraciones se pueden describir gráficamente como en la figura siguiente. Comience con x_0 en el eje x, muévase verticalmente al gráfico de f, luego horizontalmente a la recta $y = x$, luego verticalmente al gráfico de f, y así sucesivamente. Las x-coordenadas de los puntos en el gráfico de f son las iteraciones de f en $x = x_0$.

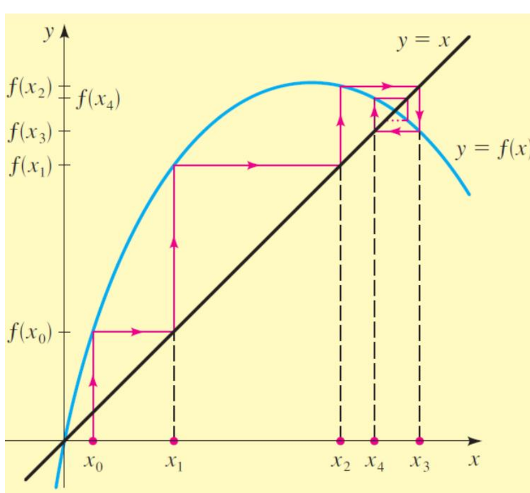


Figura 1

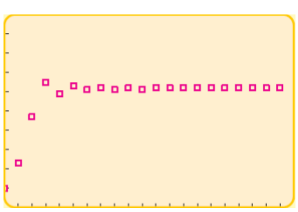
Las Iteraciones son importantes en el estudio de la función logística

$$f(x) = kx(1-x)$$

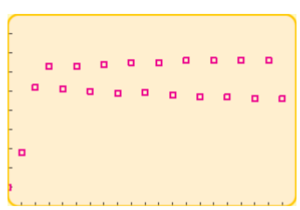
que modela la población de una especie con un potencial de crecimiento limitado (como conejos en una isla o peces en un estanque). En este modelo la población máxima que el medio ambiente puede soportar es 1 (esto es, 100%). Si empezamos con una fracción de esa población, digamos 0.1 (10%), entonces las iteraciones de f en 0.1 dan a la población después de cada intervalo de tiempo (días, meses, o años, dependiendo de la especie). La constante k depende de la tasa de crecimiento de las especies que se modelan; se llama la constante de crecimiento. Por ejemplo, para $f(x) = kx(1-x)$, $k = 2.6$ y $x_0 = 0.1$ las iteraciones mostradas en la tabla siguiente dan a la población de la especie para los primeros intervalos de tiempo de 12. La población parece estabilizarse alrededor de 0.615 (es el 61.5% del máximo).

n	x_n
0	0.1
1	0.234
2	0.46603
3	0.64700
4	0.59382
5	0.62712
6	0.60799
7	0.61968
8	0.61276
9	0.61694
10	0.61444
11	0.61595
12	0.61505

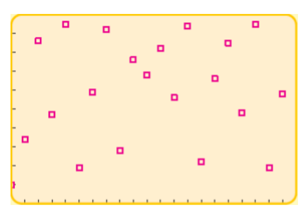
En las tres gráficas de la figura siguiente, trazamos las iteraciones de f en 0.1 para diferentes valores de la constante de crecimiento k. Para $k = 2.6$ la población parece estabilizarse a un valor 0.615 de máximo, para $k = 3.1$ la población parece oscilar entre dos valores, y para $k = 3.8$ no emerge ningún patrón obvio. Esta última situación es descrita matemáticamente por la palabra caos.



$k = 2.6$



$k = 3.1$



$k = 3.8$

1. Utilice el procedimiento gráfico ilustrado en la figura 1 para encontrar las primeras cinco iteraciones de $f(x) = 2x(1-x)$ en $x_0 = 0.1$

2. Utilice el procedimiento gráfico ilustrado en la figura 1 para encontrar las primeras cinco iteraciones de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 1$.

3. Utilice el procedimiento gráfico ilustrado en la figura 1 para encontrar las primeras cinco iteraciones de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 2$.

4. Construya una tabla para las primeras seis iteraciones de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $x_0 = 2$. ¿Cuál es el 1000th iteración de *f* en 2?

5. Encontrar el primer 10 iteraciones de la función logística en $x_0 = 0.1$ para el valor dado de k. ¿parece que la población se estabiliza, oscila o es caótica?

a. $k = 2.1$ **b.** $k = 3.2$ **c.** $k = 3.9$

6. Es fácil encontrar iteraciones utilizando un SAC. Los siguientes pasos muestran una de muchas formas de cómo encontrar las iteraciones de $f(x) = kx(1-x)$ en $x_0 = 0.1$ para $k = 3$.

Y1 = K∗X∗(1−X)	defina la función en el programa
3→K	defina el valor de k
0.1→X	ingrese el valor inicial de x
Y1→X	construya las iteraciones para calcular la tabla según el programa utilizado

7. También puede utilizar el SAC para graficar las iteraciones y estudiarlas visualmente. Utilice una computadora para experimentar cómo el valor de k afecta a las iteraciones de $f(x) = kx(1-x)$ en $x_0 = 0.1$. Encuentra varios valores diferentes de k que hacen que las iteraciones se estabilicen en un valor, oscilen entre dos valores y exhiban el caos. (use valores de k entre 1 y 4.) ¿se puede encontrar un valor de k que hace que las iteraciones oscilan entre cuatro valores?

Problema 3: Funciones armónicas simples

Al resolver cierta clase de problemas matemáticos avanzados (problemas que tienen que ver con circuitos eléctricos, sistemas de masa-resorte, flujo de calor, etc.), el proceso de solución conduce de manera natural a una función de la forma

$$y = M\operatorname{sen} Bt + N\cos Bt \qquad (1)$$

Al desarrollar este problema el estudiante mostrará que la ecuación anterior se puede representar como una ecuación de la forma

$$y = A\operatorname{sen}(Bt + C) \qquad (2)$$

3.1 Utilice su programa de cómputo para explorar el comportamiento de la gráfica de le ecuación (1) para algunos valores de M, N y B. ¿Las gráficas obtenidas, parecen ser de la forma $y = A\operatorname{sen}(Bt + C)$? Explique.

3.2 Dibuje la representación gráfica de la ecuación $y = 2\operatorname{sen}(\pi t) - 3\cos(\pi t)$. Haciendo las ampliaciones necesarias obtenga los valores de A, B y C y luego construya la ecuación de la forma $y = A\operatorname{sen}(Bt + C)$. Dibuje en una misma pantalla Las representaciones gráficas de las dos funciones. ¿Son aproximadamente iguales? Explique.

3.3 El problema ahora es: dados M, N y B en la ecuación (1), encuentre A, B y C para construir la ecuación (2), de manera que ésta produzca la misma gráfica que la anterior. En general es preferible la ecuación (2) ya que de ella se puede leer fácilmente la amplitud, periodo y desplazamiento de fase. El proceso para encontrar A, B y C, dados M, N y B no es fácil y se requiere mucho ingenio y el uso de la fórmula

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \qquad (3)$$

Demuestre que la identidad de transformación es

$$y = M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt = \sqrt{M^2 + N^2}\, \operatorname{sen}(Bt + C) \qquad (4)$$

donde C es cualquier ángulo que tiene al punto $P(M,N)$ como lado terminal, es decir que C puede ser cualquier ángulo con el mismo lado terminal de $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{N}{M}\right)$

.

Sugerencia: un primer paso es el siguiente

$$M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt = \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{\sqrt{M^2 + N^2}}\left(M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt\right)$$

3.4 Utilice la identidad de transformación dada en la ecuación (4) para transformar la ecuación

$$y_1 = -4 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

a la forma $y_2 = A\operatorname{sen}(Bt + C)$ donde C se escoge de manera que $|C|$ sea mínima. Calcule C hasta con 3 cifras decimales. A partir de la nueva ecuación determine la amplitud, período y desplazamiento de fase.

3.5 Dibuje las representaciones gráficas de y_1 y y_2 del inciso anterior en un mismo rectángulo de visualización.

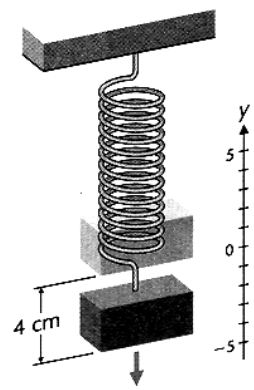
3.6 **Aplicación a la física.** Se suspende un resorte, con una constante del resorte de 64, se jala 4 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y después se le da un empuje hacia abajo para producir una velocidad inicial hacia abajo de 24 centímetros por segundo. en matemáticas más avanzadas (ecuaciones diferenciales) se encuentra que la ecuación de movimiento, despreciando la resistencia del aire y la fricción, está dada de manera aproximada por la ecuación

$$y = -3\operatorname{sen}(8t) - 4\cos(8t)$$

donde y_1 es la posición del peso W en la parte inferior de la escala en el tiempo t (véase la figura). y está en centímetros y t en segundos. Obtenga una ecuación de la forma

$$y = A\operatorname{sen}(Bt + C)$$

Dibuje la representación gráfica de las dos ecuaciones anteriores en un mismo rectángulo de visualización para $0 \le t \le 6$. ¿Cuántas veces pasara el objeto por $y = 2$ en los 6 primeros segundos? Encuentre los valores de t para los cuales $y = 2$, si $0 \le t \le 6$.



Referencias

[1] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas Mathematica, Scientific Notebbok y Mathcad.

[2] Stewart J. Redlin L. Watson S. Precálculo. 7a. edición. Cengage Learninmg.

[3] www.stewartmath.com