Proyecto No. 2

Entrega: martes 17 de abril de 2018

Introducción:

Para este proyecto se proponen 3 problemas. Para resolverlos el estudiante debe hacer uso de los conocimientos adquiridos en las 3 últimas unidades del curso, así también debe hacer uso de un Sistema algebraico por computadora (SAC) con la capacidad de calcular derivadas e integrales simbólicamente.

En el primer problema el estudiante utilizará un SAC para dibujar la gráfica de funciones y su derivada, con el propósito de obtener gráficamente los valores máximos y mínimos de la función. El segundo, es un problema de optimización, en donde el estudiante debe utilizar sus habilidades para el planteamiento de modelos matemáticos en el cálculo diferencial. El tercer problema, que se incluye siempre en el segundo proyecto, está relacionado con el teorema fundamental del cálculo y el entendimiento del mismo de forma visual.

Objetivo:

El principal objetivo de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial e integral.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando un problema requiera el uso de tecnología, para realizar cálculos o bien para la elaboración de gráficas, se recomienda utilizar *Mathematica*; pero el estudiante está en la libertad de utilizar el programa que considere conveniente.
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Valores máximo y mínimo de funciones

La figura 1 muestra la gráfica de la función $f(x) = 4x^4 - 11x^2 - 5x - 3$ y la de su derivada $f'(x) = 16x^3 - 22x - 5$ en el intervalo $[-2, 2]$

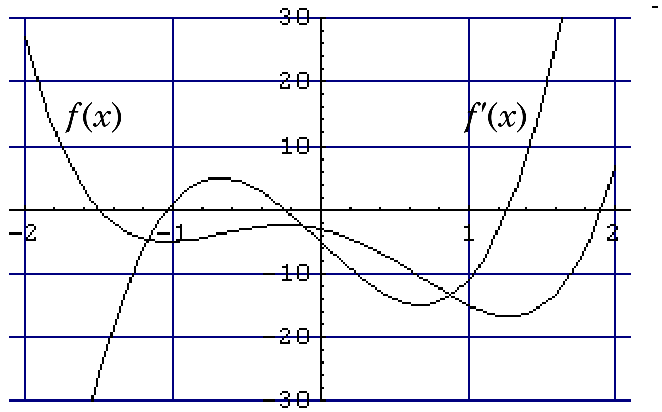


Figura 1

Para determinar el valor mínimo de f en el intervalo dado podemos intentar hacer un acercamiento al punto más bajo de la gráfica. La figura 2 muestra un acercamiento de f en el intervalo $[1.271, 1.275]$, donde es difícil localizar el punto más bajo con precisión. La razón se debe a que después de muchos acercamientos, la gráfica es indistinguible de su recta tangente, la cual es horizontal en un máximo o en un mínimo local.

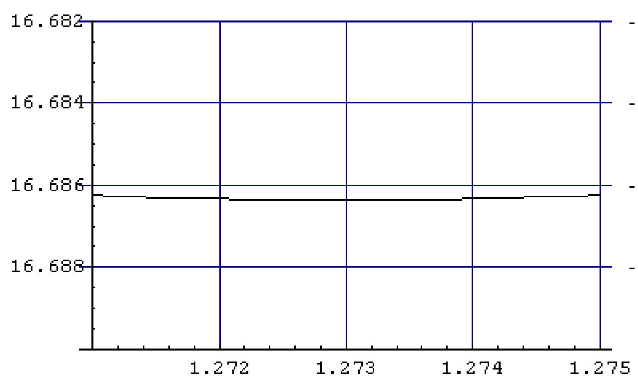


Figura 2

En consecuencia es mejor acercarse a la raíz correspondiente a la derivada $f'(x)$. Entonces podemos localizar el punto crítico con mayor precisión, como puede verse en la figura 3. Aquí es claro que el valor mínimo alcanzado por $f(x)$ en $[-2, 2]$ es aproximadamente $f(1.273) = -16.686$.

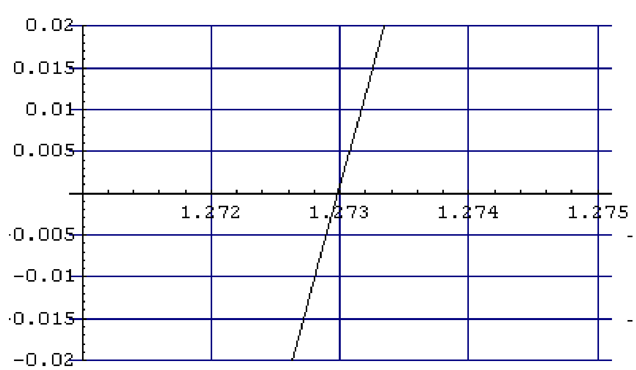


Figura 3

Para las funciones dadas, utilice su programa de cómputo para desarrollar las actividades propuestas

1.1 Calcule la primera derivada.

1.2 Dibuje la representación gráfica de la función y su derivada en el intervalo dado, utilizando un mismo sistema de coordenadas. Haga un acercamiento de la derivada en los valores máximos y mínimos de la función. Muestre la representación gráfica del acercamiento.

1.3 Determine aproximadamente de la gráfica el valor de x, en donde se localiza el máximo o el mínimo.

1.4 Utilice su programa de cómputo para resolver la ecuación $f'(x)=0$, compare los resultados obtenidos con las estimaciones del inciso anterior.

1.5 Evaluar la función en los valores de x, del inciso anterior, para encontrar los máximos o mínimos.

1.6 Determine en que intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente.

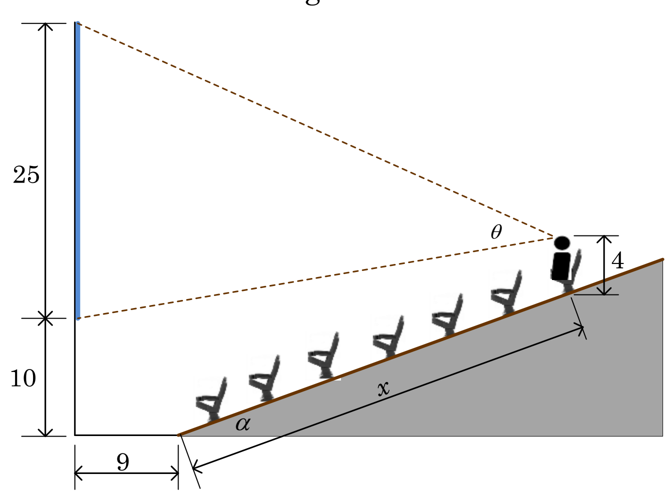
(a) $f(x)=8x^5+45x^4+80x^3+90x^2+200x; \quad [-4,2]$

(b) $f(x)=\operatorname{sen}x+\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3}, \quad [-\pi,\pi]$

(c) $f(x)=(x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}; \quad [-5,5]$

Problema 2: donde sentarse en el cine

Una sala de cine tiene una pantalla que está colocada 10 pies sobre el nivel del suelo y mide 25 pies de altura. La primera fila de asientos está ubicada a 9 pies de la pantalla y las filas están separadas 3 pies. El piso en la zona de asientos está inclinado un ángulo de $\alpha=20^\circ$ por arriba de la horizontal; y la distancia inclinada hasta donde el espectador esta sentado es x. La sala tiene 21 filas de asientos. Si el mejor lugar para sentarse es aquel en donde el ángulo θ que subtiende la pantalla a sus ojos es máximo. Suponga también que los ojos del espectador están localizados a 4 pies por encima del piso, como se muestra en la figura.



2.1 Demuestre que

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

Donde

$$a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2$$

Y

$$b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x\,\mathrm{sen}\,\alpha - 6)^2$$

2.2 Encuentre el dominio para la función θ en términos de x.

2.3 Utilice su SAC para dibujar la gráfica de θ. Utilice la gráfica para estimar el valor de x para el cual el ángulo de visión es máximo. ¿En cual fila debe sentarse el espectador? ¿Cuál es el ángulo de visión en esta fila?

2.4 Utilice su SAC para calcular la derivada de θ con respecto a x y para resolver la ecuación

$$\frac{d\theta}{dx} = 0$$

¿Es este resultado equivalente al resultado del inciso anterior?

Problema 3: El teorema fundamental del cálculo

3.1 Trace la recta $y = 2t - 1$ y use geometría para encontrar el área bajo esta recta que pasa por arriba del eje t entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 4$.

3.2 Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región bajo la recta $y = 2t - 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje la región y use geometría para encontrar una expresión para $A(x)$

3.3 Calcule la derivada del área $A(x)$. ¿Qué observa?

3.4 Si $x \geq -2$, sea $A(x) = \int_{-2}^{x} (4 - t^2)dt$. $A(x)$ representa el área de una región. Bosquéjela.

3.5 Utilice el teorema de evaluación para hallar una expresión para $A(x)$. Calcule la derivada del Área $A(x)$

3.6 Use el inciso anterior para dar una explicación intuitiva al resultado del inciso 3.5.

3.7 Utilice su programa de cómputo para dibujar la gráfica de la función $f(x) = \mathrm{sen}(x^2)$, en una pantalla $[0, \pi]$, para x, y [-1.25, 1.25] para y.

3.8 Se define una nueva función g de la forma

$$g(x) = \int_{0}^{x} \mathrm{sen}(t^2)dt$$

Utilice el comando de integración en su programa de cómputo para calcular

$$g(0.2), g(0.4), g(0.6)\ldots g(3), g(\pi)$$

3.9 Utilice su programa para dibujar la gráfica de los puntos $(x,g(x))$ que se han obtenido. Utilice estos puntos para bosquejar la gráfica de la función $g(x)$.

3.10 Utilice la gráfica del inciso anterior para bosquejar la gráfica de $g'(x)$ usando la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. Compare las gráficas de $g'(x)$ y $f(x)$.

3.11 Suponga que *f* es continua en el intervalo $[a,b]$ y que se define una nueva función *g* de la forma que sigue

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

3.12 Con base en los resultados de los incisos 3.1 a 3.10, haga una conjetura sobre una expresión para $g'(x)$.

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, sexta edición. Cengage Learning.

[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook* y *Mathematica.*

[3] Edwards y Peney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] Larson R. Hostetler R. Edwards B. Cálculo con geometría analítica, octava edición. Mc Graw Hill.

[5] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt