Proyecto No. 2

Entrega: viernes 26 de octubre

Introducción:

Para este proyecto se proponen 3 problemas. Para resolverlos el estudiante debe hacer uso de los conocimientos adquiridos en las 3 últimas unidades del curso, así también debe hacer uso de un Sistema algebraico por computadora (SAC) con la capacidad de calcular derivadas e integrales simbólicamente.

En el primer problema el estudiante utilizará un SAC para dibujar la gráfica de funciones y su derivada, con el propósito de obtener gráficamente los valores máximos y mínimos de la función. El segundo, es un problema de optimización, en donde el estudiante debe utilizar sus habilidades para el planteamiento de modelos matemáticos en el cálculo diferencial. El tercer problema, que se incluye siempre en el segundo proyecto, está relacionado con el teorema fundamental del cálculo y el entendimiento del mismo en forma visual.

Objetivo:

El principal objetivo de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial e integral.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de tres estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica*.
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema 1: Valores máximo y mínimo de funciones

La figura 1 muestra la gráfica de la función $f(x)=4x^4-11x^2-5x-3$ y la de su derivada $f'(x)=16x^3-22x-5$ en el intervalo $[-2,2]$

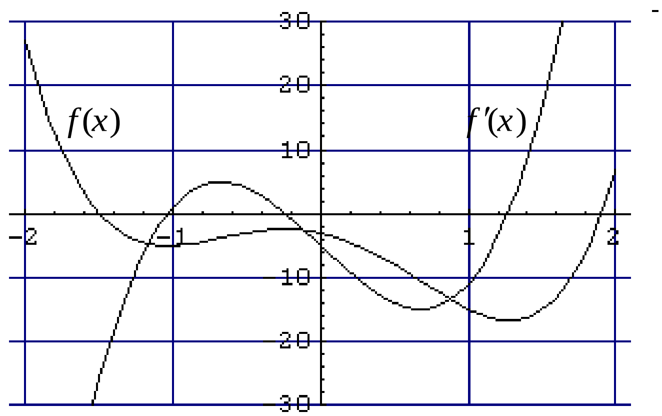


Figura 1

Para determinar el valor mínimo de *f* en el intervalo dado podemos intentar hacer un acercamiento al punto más bajo de la gráfica. La figura 2 muestra un acercamiento de *f* en el intervalo $[1.271, 1.275]$, donde es difícil localizar el punto más bajo con precisión. La razón se debe a que después de muchos acercamientos, la gráfica es indistinguible de su recta tangente, la cual es horizontal en un máximo o en un mínimo local.

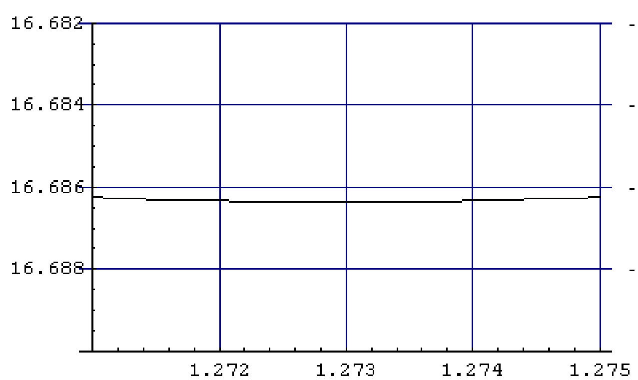


Figura 2

En consecuencia es mejor acercarse a la raíz correspondiente a la derivada $f'(x)$. Entonces podemos localizar el punto crítico con mayor precisión, como puede verse en la figura 3. Aquí es claro que el valor mínimo alcanzado por $f(x)$ en $[-2,2]$ es aproximadamente $f(1.273)=-16.686$.

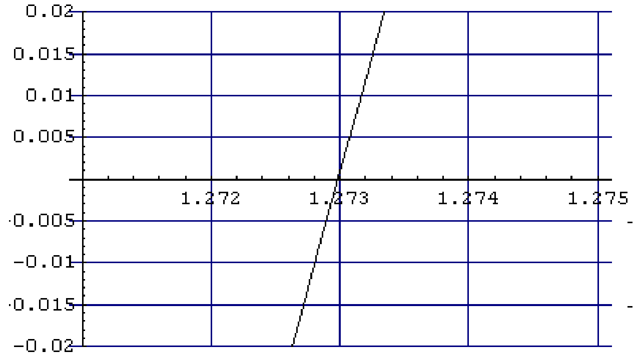


Figura 3

Para las funciones dadas, utilice su programa de cómputo para desarrollar las actividades propuestas

1.1 Calcule la primera derivada.

1.2 Dibuje la representación gráfica de la función y su derivada en el intervalo dado, utilizando un mismo sistema de coordenadas. Haga un acercamiento de la derivada en los valores máximos y mínimos de la función. Muestre la representación gráfica del acercamiento.

1.3 Determine aproximadamente de la gráfica el valor de *x*, en donde se localiza el máximo o el mínimo.

1.4 Utilice su programa de cómputo para resolver la ecuación $f'(x)=0$, compare los resultados obtenidos con las estimaciones del inciso anterior.

1.5 Evaluar la función en los valores de *x*, del inciso anterior, para encontrar los máximos o mínimos.

1.6 Determine en que intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente.

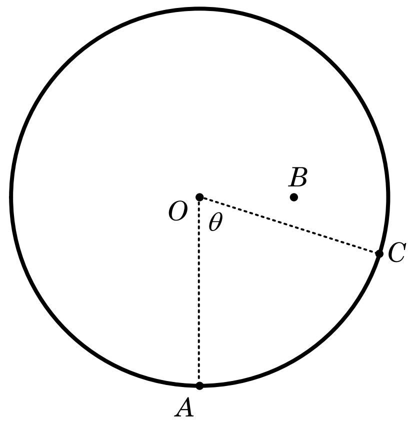
(a) $f(x)=8x^5+45x^4+80x^3+90x^2+200x; \quad [-4,2]$

(b) $f(x)=\operatorname{sen} x+\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3}, \quad [-\pi,\pi]$

(c) $f(x)=(x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}; \quad [-5,5]$

Problema 2: Sabe cálculo el perro

Un perro se encuentra junto a su amo en el punto *A*, en la orilla de una laguna circular de 50 metros de radio, como se muestra en la figura. El amo lanza una pelota al lago, la cual cae en el punto *B*, localizado 25 metros al este y 50 metros hacia el norte del punto *A*. Para alcanzar la pelota el perro corre por la orilla circular del lago hasta un punto *C* y seguidamente nada por el agua para alcanzar la pelota. El perro puede correr con una rapidez de 12 kilómetros por hora y nadar a una velocidad de 3 kilómetros por hora.



2.1 Haga un bosquejo de diferentes trayectorias que puede tomar el perro.

2.2 Calcule el tiempo que tarda el perro en alcanzar la pelota si todo el recorrido lo hace nadando.

2.3 Calcule el tiempo que tarda el perro en alcanzar la pelota, si se lanza al agua en un punto donde nade la menor distancia posible.

2.4 Obtenga una función que modele el tiempo total del recorrido del perro para cualquier ubicación del punto C, en términos del ángulo θ. Obtenga el dominio de ésta función.

2.5 Dibuje la representación gráfica de la función y estime el tiempo mínimo del recorrido.

2.6 Utilice procedimientos algebraicos para obtener el tiempo mínimo. Utilice el método de Newton si es necesario para obtener los valores críticos.

Problema 3: El teorema fundamental del cálculo

3.1 Trace la recta $y = 2t - 1$ y use geometría para encontrar el área bajo esta recta que pasa por arriba del eje t entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

3.2 Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región bajo la recta $y = 2t - 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje la región y use geometría para encontrar una expresión para $A(x)$

3.3 Calcule la derivada del área $A(x)$. ¿Qué observa?

3.4 Si $x \geq -2$, sea $A(x) = \int_{-2}^{x} (4 - t^2)dt$. $A(x)$ representa el área de una región. Bosquéjela.

3.5 Utilice el teorema de evaluación para hallar una expresión para $A(x)$. Calcule la derivada del Área $A(x)$

3.6 Use el inciso anterior para dar una explicación intuitiva al resultado del inciso 3.5.

3.7 Utilice su programa de cómputo para dibujar la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x^2)$, en una pantalla $[0, \pi]$, para x, y [-1.25, 1.25] para y.

3.8 Se define una nueva función *g* de la forma

$$g(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$$

Utilice el comando de integración en su programa de cómputo para calcular

$$g(0.2), g(0.4), g(0.6) \ldots g(3), g(\pi)$$

3.9 Utilice su programa para dibujar la gráfica de los puntos $(x, g(x))$ que se han obtenido. Utilice estos puntos para bosquejar la gráfica de la función $g(x)$.

3.10 Utilice la gráfica del inciso anterior para bosquejar la gráfica de $g'(x)$ usando la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. Compare las gráficas de $g'(x)$ y $f(x)$.

3.11 Suponga que f es continua en el intervalo $[a,b]$ y que se define una nueva función g de la forma que sigue

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

3.12 Con base en los resultados de los incisos 3.1 a 3.10, haga una conjetura sobre una expresión para $g'(x)$.

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, octava edición. Cengage Learning.

[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook* y *Mathematica.*

[3] Edwards y Peney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] Larson R. Hostetler R. Edwards B. Cálculo con geometría analítica, octava edición. Mc Graw Hill.

[5] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt