Técnicas de Integración: Problemas Resueltos

Ing. Carlos Alfredo Angulo*
Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

1. Prefacio

La preparación de todo ingeniero abarca diversos aspectos, entre ellos, la habilidad abstracta. Para crear una habilidad de este tipo, propicia para un profesional de la ingeniería, todo estudiante debe cursar un número mínimo de cursos de Matemática, antes de cursar los cursos que competen meramente a su campo de desempeño. Uno de los cursos de mayor contenido y carga académica es el de Matemática Intermedia I, el cual es tenido por muchos como el más importante de los cursos de matemática, si bien esto queda a criterio de cada individuo, lo cierto es que es el curso que más créditos académicos otorga dentro de las redes de estudio de las carreras de ingeniería de la Universidad de San Carlos. La extensión y complejidad de sus contenidos son factores debido a los cuales existe cierta deficiencia en el desempeño de los estudiantes que cursan Intermedia I. Uno de los primeros temas a tratar es el de técnicas de integración; dicho tema representa la unión o el vínculo entre este curso y su pre-requisito, Matemática Básica II puesto que se retoma el tema de las antiderivadas y las integrales definidas, ahora con un enfoque más maduro y exigente, puesto que ya se posee una base sólida de cálculo de una variable. Si bien es cierto que no toda función posee antiderivada, esta no es razón para concluir que únicamente un limitado número de ellas la poseen. Es más, tras un estudio sólido de técnicas de integración, el estudiante puede reconocer que la mayoría de las funciones que aparecen en el campo de aplicación poseen antiderivada, y la suposición inicial cambia de dirección al identificar que en realidad, es un limitado conjunto de funciones cuya antiderivada no puede ser determinada de forma "natural".

Con estos hechos en mente, el autor se ha dado a la tarea de escribir un documento de apoyo para los estudiantes del curso de Intermedia I, enfocado en el tema de técnicas de integración. Las cualidades esenciales del presente documento son la objetividad y la simplicidad; Puesto que se desea transmitir al estudiante una guía práctica para la realización de ejercicios de técnicas de integración, ilustrar los métodos a seguir para los diversos casos de integración y a su vez dar nociones sobre cuándo se debe aplicar cuál método, con base en las forma del integrando, el tipo de términos con los que cuenta, las operaciones de las que consta

*Edición: José Estuardo Orellana

y las funciones que lo conforman. Debe tenerse en cuenta que para un correcto aprendizaje, la práctica es un punto clave, por lo que se ha dejado de lado temas como demostraciones e interpretaciones, para abarcar meramente la realización de ejercicios y la discusión de resultados. Asimismo se incita al estudiante a trascender más allá de este documento, y buscar una fuente complementaria o principal igual o más completa para así desarrollar un óptimo conocimiento en el tema de técnicas de integración.

Sin más preámbulo, se procede a los ejercicios.

2. Solución a problemas propuestos

2.1. Calcule $\int_0^1 tg^{-1}(x)dx$

Solución: Por convención:

$$tg^{-1}(x) = \text{tangente inversa}$$

El recíproco de la tangente lo expresamos como $Cot(x)$ o de la forma $[tg(x)]^{-1}$.

Sin lugar a ambigüedades es mejor la notación para designar la tangente inversa es $arctg(x)$.

Ya que:

$$D_x[fg] = f'g + fg'$$
$$\int D_x[fg] = \int f'g + \int fg'$$

Puesto que la integral anula la derivación.

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Llamemos:

$$f = tg^{-1}(x) \qquad\qquad g' = 1$$
$$f' = \frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad g = x$$

$$\int_0^1 tg^{-1}(x)\,dx = x\,tg^{-1}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,x\,dx$$

Haciendo:

$$\boxed{\begin{array}{c} u = 1+x^2 \\ du = 2\,x\,dx \end{array}}$$

Se llega a:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 tg^{-1}(x)\,dx &= tg^{-1}(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u} \\
&= tg^{-1}(1) - \frac{1}{2}Ln(u)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Ln(1+x^2)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[Ln(2) - Ln(1)] \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Ln(2) \\
&= \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \mathbf{Ln}(\sqrt{2})}} \\
&\approx \underline{\mathbf{0\,.\,439}}
\end{aligned}$$

2.2. Calcule $\int e^{2\theta} Sen(3\theta)\,d\theta$

Solución: Nuevamente, usando integración por partes:

$$\int D(fg) = \int f'g + \int fg'$$

Tenemos:

$$\int f'\,g = f\,g - \int f\,g'$$

$$f' = e^{2\theta} \qquad\qquad g = Sen(3\theta)$$

$$f = \frac{1}{2}e^{2\theta} \qquad\qquad g' = 3Cos(3\theta)$$

$$\therefore \int e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta = \frac{1}{2}e^{2\theta}Sen(3\theta) - \frac{3}{2}\int e^{2\theta}Cos(3\theta)d\theta \qquad \text{(I)}$$

$\int e^{2\theta}Cos(3\theta)d\theta :$ Nuevamente a esta integral aplicamos integración por partes:

$$\int D(fg) = \int f'g + \int fg'$$
$$\int f'g = fg - \int fg'$$
$$f' = e^{2\theta} \qquad\qquad g = Cos(3\theta)$$
$$f = \frac{1}{2}e^{2\theta} \qquad\qquad g' = -3Sen(3\theta) \therefore$$

$$\begin{aligned}\int e^{2\theta}Cos(3\theta)d\theta &= \frac{1}{2}e^{2\theta}Cos(3\theta) + 3\int \frac{1}{2}e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}e^{2\theta}Cos(3\theta) + \frac{3}{2}\int e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta\end{aligned}$$

Sustituyendo en (I) tenemos:

$$\begin{aligned}\int e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta &= \frac{1}{2}e^{2\theta}Sen(3\theta) - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2\theta}Cos(3\theta) + \frac{3}{2}\int e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{2\theta}Sen(3\theta) - \frac{3}{4}e^{2\theta}Cos(3\theta) - \frac{9}{4}\int e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta \\ \frac{13}{4}\int e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta &= e^{2\theta}\left[\frac{1}{2}Sen(3\theta) - \frac{3}{4}Cos(3\theta)\right] \therefore \\ \int e^{2\theta}Sen(3\theta)d\theta &= \underline{\mathbf{e^{2\theta}}\left[\mathbf{\frac{2}{13}Sen(3}\theta\mathbf{)} - \mathbf{\frac{3}{13}Cos(3}\theta\mathbf{)}\right] + \mathbb{K}}\end{aligned}$$

Se agrega una constante al resultado, por ser una integral indefinida.

En ocasiones antes de aplicar integración por partes hay que utilizar una sustitución por u. Ejemplo:

2.3. Calcule $\int Cos(x^{1/2})dx$

Hagamos $u = x^{1/2}$, $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $du = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}dx$. La sustitución no parece adecuada puesto que no tenemos $x^{-1/2}$ o mejor dicho no tenemos el cociente $\frac{1}{x^{1/2}}$. Esto se arregla así:

$$\int \frac{x^{1/2}}{x^{-1/2}}Cos(x^{1/2})dx \qquad \text{Ahora procede la sustitución por } u\text{:}$$
$$2\int u\,Cos(u)du \qquad \text{ahora aplicaremos integración por partes:}$$

$$\int f\,g' = f\,g - \int f'\,g$$

$$f = u \qquad\qquad g' = Cos(u)$$
$$f' = 1 \qquad\qquad g = Sen(u) \therefore$$

$$
\begin{aligned}
2\int u\,Cos(u)du &= \left[u\,Sen(u) - \int Sen(u)\right] * 2 \\
&= 2u\,Sen(u) + 2Cos(u) + \mathbb{K} \\
&= 2x^{1/2}\,Sen(x^{1/2}) + 2Cos(x^{1/2}) + \mathbb{K} \\
&= \underline{\mathbf{2}\left[\sqrt{\mathbf{x}}\,\mathbf{Sen}(\sqrt{\mathbf{x}}) + \mathbf{Cos}(\sqrt{\mathbf{x}})\right] + \mathbb{K}}
\end{aligned}
$$

Hay integrales que aparecen con mucha frecuencia, por lo tanto es bueno que desarrollemos sus fórmulas.

2.4. Desarrollo de fórmulas de integrales

2.4.1. $\int Sen^2(x)dx$

$$\int f\,g' = f\,g - \int f'\,g$$

$$\boxed{\begin{array}{llll}
f & = Sen^2(x) & g' & = 1 \\
f' & = 2Sen(x)Cos(x) & g & = x \\
 & \int Sen^2(x)dx = x\,Sen^2(x) - \int 2x[Sen(x)Cos(x)]dx & &
\end{array}}$$

El camino no es por aquí ya que, ¡se complica la integración!

¿Cuál es el camino correcto? Solo queda despeñicar

$$\int Sen^2(x)dx = \int \underbrace{[Sen(x)]}_{f}\,\underbrace{Sen(x)}_{g'}\,dx$$

$\int f\,g' = f\,g - \int f'\,g$
$f = Sen(x) \quad g' = Sen(x)$
$f' = Cos(x) \quad g = -Cos(x)$ Lo que nos lleva a:

$$\int Sen^2(x)dx = -Sen(x)Cos(x) + \int \underbrace{Cos^2(x)dx}_{\updownarrow}$$

$$\int Sen^2(x)dx = -Sen(x)Cos(x) + \int (1 - Sen^2(x))dx$$

$$= -Sen(x)Cos(x) + \int dx - \int Sen^2(x)dx$$

$$\therefore 2\int Sen^2(x)dx = -Sen(x)Cos(x) + x + \mathbb{K}$$

$$\int Sen^2(x)dx = -\frac{1}{2}Sen(x)Cos(x) + \frac{x}{2} + \mathbb{K}$$

Usando identidades trigonométricas podemos llevar el resultado anterior a:

$$Sen(2t) = 2Sen(t)Cos(t) \therefore$$

$$-\frac{1}{4}Sen(2t) = -\frac{1}{2}Sen(t)Cos(t) \therefore$$

$$\int Sen^2(x)dx = \underline{\mathbf{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}Sen(2x)} + \mathbb{K}}$$

Análogamente se puede desarrollar:

2.4.2. $\int Cos^2(x)dx$

$$= \int \underbrace{[Cos(x)]}_{f}\underbrace{Cos(x)}_{g'}dx$$

$$\begin{array}{ll} \int f\ g' = f\ g - \int f'\ g & \\ f = Cos(x) & g' = Cos(x) \\ f' = -Sen(x) & g = Sen(x) \end{array}$$

$$\int [Cos(x)]Cos(x)dx = Sen(x)Cos(x) + \int \underbrace{Sen^2(x)dx}_{\updownarrow}$$

$$= Sen(x)Cos(x) + \int (1 - Cos^2(x))dx$$

$$= Sen(x)Cos(x) + \int dx - \int Cos^2(x)dx$$

$$2\int Cos^2(x)dx = Sen(x)Cos(x) + x + \mathbb{K}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\int Cos^2(x)dx &= \frac{1}{2}Sen(x)Cos(x) + \frac{x}{2} + \mathbb{K}_1 \\
Sen(2x) &= 2Sen(x)Cos(x) \therefore \\
\frac{1}{4}Sen(2x) &= \frac{1}{2}Sen(x)Cos(x) \therefore \\
\int Cos^2(x)dx &= \underline{\mathbf{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}Sen(2x) + \mathbb{K}_1}}
\end{aligned}$$

2.5. Ejemplo Práctico

Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2\ e^{-t}\ m/s$ después de t segundos. ¿Qué tan lejos viaja después de t segundos?

<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= t^2\ e^{-t} \text{ Por lo tanto:} \\
ds &= t^2\ e^{-t}dt \therefore \\
\int_0^t ds &= \int_0^t t^2\ e^{-t}dt \\
s(t) - s(0) &= \int_0^t t^2 e^{-t}dt \qquad\qquad s(t) - s(0) \text{ Es lo que ha viajado después de } t \text{ segundos}
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$f = t^2 \quad g' = e^{-t}$$

$$s(t) - s(0) = \int_0^t \underbrace{t^2}_{f} \; \underbrace{e^{-t}}_{g'} dt \qquad f' = 2t \quad g = -e^{-t}$$

$$s(t) - s(0) = -t^2\, e^{-t} + 2\int \underbrace{t}_{f} \; \underbrace{e^{-t}}_{g'} dt \qquad f = t \quad g' = e^{-t}$$

$$f' = 1 \quad g = -e^{-t}$$

$$\begin{aligned}
&= -t^2\, e^{-t} + 2\left[-t\, e^{-t} + \int e^{-t} dt\right] \\
&= -t^2\, e^{-t} - 2t\, e^{-t} + 2[-e^{-t}]\Big|_0^t \\
&= e^{-t}[-t^2 - 2t - 2]\Big|_0^t \\
&= -e^{-t}[t^2 + 2t + 2]\Big|_0^t && \text{No olvidar que la integración es definida} \\
&= -e^{-t}[t^2 + 2t + 2] + e^0[0 + 0 + 2] \\
s(t) - s(0) &= \underline{\mathbf{2 - e^{-t}[t^2 + 2t + 2]}} && \text{Si } s(0) = 0 \text{ entonces:} \\
s(t) &= \underline{\mathbf{2 - e^{-t}\left[t^2 + 2t + 2\right]}}
\end{aligned}$$

3. Integrales Trigonométricas

Pasamos ahora a estudiar técnicas para evaluar integrales trigonométricas. Los siguientes ejemplos ilustran tales técnicas:

3.1.

$$\int Sen^3(x) Cos^2(x) dx$$

Recordemos que $Sen^2(t) = 1 - Cos^2(t)$ y $Cos^2(t) = 1 - Sen^2(t)$

$$\int Sen^2(x)Sen(x)Cos^2(x)dx$$

$$= \int (1 - Cos^2(x))Sen(x)Cos^2(x)dx \qquad u = Cos(x)$$

$$du = -Sen(x)dx$$

$$= -\int \left(1 - u^2\right) u^2 du$$

$$= -\int (u^2 - u^4)du = \underline{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{u^3} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{u^5} + \mathbb{K}}$$

$$= \underline{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{Cos(x)})^{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(\mathbf{Cos(x)})^{\mathbf{5}} + \mathbb{K}}$$

3.2.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} Sen^5(x)Cos^3(x)dx$$

Aquí lo que procede es: $Sen^5(x) = Sen^4(x)Sen(x) = (Sen^2(x))^2 Sen(x)$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (Sen^2(x))^2 Sen(x)Cos^3(x)dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (1 - Cos^2(x))^2 Sen(x)Cos^3(x)dx \qquad u = Cos(x)$$

$$du = -Sen(x)dx$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (1 - u^2)^2 u^3 du$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (1 - u^2)^2 u^3 du$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (u^4 - 2u^2 + 1)u^3 du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (u^7 - 2u^5 + u^3)du$$

$$= \left(-\frac{1}{8}u^8 + \frac{1}{3}u^6 - \frac{1}{4}u^4\right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \left[-\frac{1}{8}Cos^8(x) + \frac{1}{3}Cos^6(x) - \frac{1}{4}Cos^4(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\approx (-0{,}00781 + 0{,}0417 - 0{,}0625) - (0)$$

$$\approx \underline{\mathbf{-0\,.\,02861}}$$

3.3. $\int_0^{\pi/2} Cos^2(\theta)d\theta$

Usando $Cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + Cos(2\theta))$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + Cos(2\theta))d\theta &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} Cos(2\theta)d\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(Sen(2\theta)\Big|_0^{\pi/2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}((Sen(\pi) - Sen(0))\right] \\
&= \underline{\frac{\pi}{\mathbf{4}}}
\end{aligned}$$

3.4. $\int_0^{\pi} Sen^4(3t)dt$

Solución: Aquí es bueno recordar que:

$$Sen^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - Cos(2\theta))$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} [Sen^2(3t)]^2 dt &= \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2}(1 - Cos(6t))\right]^2 dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1 - 2Cos(6t) + Cos^2(6t))dt \\
&= \frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi} dt - 2\int_0^{\pi}(Cos(6t))dt + \int_0^{\pi} Cos^2(6t)dt\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\pi - \frac{2}{6}Sen(6t)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 + Cos(12t))dt\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\pi - 0 + \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{12}Sen(12t)\right)\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\pi + \frac{1}{2}(\pi + 0)\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \underline{\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{8}}}
\end{aligned}$$

3.5. $\int_0^{\pi/2} Sen^2(x)Cos^2(x)dx$

Solución: La integral anterior se puede ver como:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} [Sen(x)Cos(x)]^2 dx &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}Sen(2x)\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (Sen^2(2x))dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - Cos(4x))dx \\
\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - Cos(4x))dx &= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}Sen(4x)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cancel{Sen(2\pi)} - 0 + \frac{1}{4}\cancel{Sen(0)}\right] \\
&= \underline{\frac{\pi}{\mathbf{16}}}
\end{aligned}
$$

Otra manera de llegar al resultado es interpretando $\int_0^{\pi/2} Cos(4x)dx$ en términos de áreas; tal integral es cero ya que:

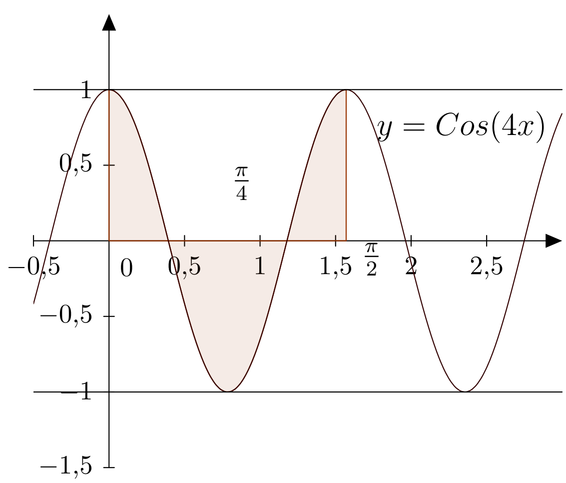


Figura 1: Interpretación adicional

3.6. $\int \dfrac{Cos^5(\alpha)}{\sqrt{Sen(\alpha)}} d\alpha$

Solución:

$$\int \frac{Cos(\alpha)Cos^4(\alpha)}{\sqrt{Sen(\alpha)}} d\alpha = \int \frac{Cos(\alpha)(1 - Sen^2(\alpha))^2}{\sqrt{Sen(\alpha)}} d\alpha$$

hagamos $u = Sen(\alpha)$

$du = Cos(\alpha)d\alpha$

$$= \int \frac{(1-u^2)^2}{u^{1/2}} du = \int \frac{1-2u^2+u^4}{u^{1/2}} du$$
$$= \int (u^{-1/2} - 2u^{3/2} + u^{7/2}) du$$
$$= 2u^{1/2} - (2)\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{9}u^{9/2} + \mathbb{K}$$
$$\underline{= \mathbf{2(Sen(\alpha))^{1/2} - \frac{4}{5}(Sen(\alpha))^{5/2} + \frac{2}{9}(Sen(\alpha))^{9/2}} + \mathbb{K}}$$
$$= 2(Sen(\alpha))^{1/2} - \frac{4}{5}(Sen(\alpha))^2(Sen(\alpha))^{1/2} + \frac{2}{9}(Sen(\alpha))^4(Sen(\alpha))^{1/2} + \mathbb{K}$$
$$= 2(Sen(\alpha))^{1/2}\left[1 - \frac{2}{5}Sen^2(\alpha) + \frac{1}{9}Sen^4(\alpha)\right] + \mathbb{K}$$
$$= \underline{\mathbf{\frac{2}{45}(Sen(\alpha))^{1/2}\left[45 - 18Sen^2(\alpha) + 5Sen^4(\alpha)\right]} + \mathbb{K}}$$

<u>Prueba:</u> $\frac{d}{d\alpha}$ se tiene:

$$Cos(\alpha)\frac{2}{45}Sen^{-1/2}(\alpha)(\frac{1}{2})\left[45 - 18Sen^2(\alpha) + 5Sen^4(\alpha)\right]$$
$$+ \frac{2}{45}Sen^{1/2}(\alpha)Cos(\alpha)\left[0 - 36Sen(\alpha) + 20Sen^3(\alpha)\right]$$
$$= Cos(\alpha)\frac{1}{45}\left[45Sen^{-1/2}(\alpha) - 18Sen^{3/2}(\alpha) + 5Sen^{7/2}(\alpha)\right]$$
$$+ \frac{2}{45}\left[-36Sen^{3/2}(\alpha) + 20Sen^{7/2}(\alpha)\right]Cos(\alpha)$$
$$= \left[Sen^{-1/2}(\alpha) - \frac{18}{45}\cancel{Sen^{3/2}(\alpha)} + \frac{5}{45}\cancel{Sen^{7/2}(\alpha)} - \frac{72}{45}\cancel{Sen^{3/2}(\alpha)} + \frac{40}{45}\cancel{Sen^{7/2}(\alpha)}\right]Cos(\alpha)$$
$$= Cos(\alpha)\left(Sen^{-1/2}(\alpha) - 2Sen^{3/2}(\alpha) + Sen^{7/2}(\alpha)\right)$$

Multiplicando por $\frac{\sqrt{Sen(\alpha)}}{\sqrt{Sen(\alpha)}}$ se tiene:

$$Cos(\alpha)\left(\frac{1}{\sqrt{Sen(\alpha)}} - 2\frac{Sen^2(\alpha)}{\sqrt{Sen(\alpha)}} + \frac{Sen^4(\alpha)}{\sqrt{Sen(\alpha)}}\right) =$$
$$Cos(\alpha)\left(\frac{1 - 2Sen^2(\alpha) + Sen^4(\alpha)}{\sqrt{Sen(\alpha)}}\right) = \frac{(1 - Sen^2(\alpha))^2}{\sqrt{Sen(\alpha)}}Cos(\alpha)$$
$$= \frac{Cos^4(\alpha)Cos(\alpha)}{\sqrt{Sen(\alpha)}} = \underline{\frac{\mathbf{Cos^5}(\alpha)}{\sqrt{\mathbf{Sen}(\alpha)}}}$$

3.7. $\int \frac{Cos(x)+Sen(2x)}{Sen(x)}dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \frac{Cos(x)+Sen(2x)}{Sen(x)}dx &= \int \frac{Cos(x)}{Sen(x)}dx + \int \frac{2Sen(x)Cos(x)}{Sen(x)}dx\\ &= \int \frac{du}{u} + 2\int Cos(x)dx\\ &= Ln|u| + 2Sen(x) + \mathbb{K}\\ &= \underline{\mathbf{Ln|Sen(x)| + 2Sen(x)} + \mathbb{K}}\end{aligned}$$

3.8. $\int Sec^2(x)tg(x)dx$

Aquí es bueno recordar: $\frac{d}{dx}(tg(x)) = Sec^2(x)$

$Sec^2(x) = 1 + tg^2(x)$

Es claro que al hacer: $u = tg(x) \Rightarrow du = Sec^2(x)dx$

$$\int udu = \frac{1}{2}u^2 + \mathbb{K} = \underline{\mathbf{\frac{1}{2}(tg(x))^2} + \mathbb{K}}$$

3.9. $\int tg^2(x)dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int tg^2(x)dx &= \int \frac{Sen^2(x)}{Cos^2(x)}dx = \int \frac{1-Cos^2(x)}{Cos^2(x)}dx\\ &= \int \frac{1}{Cos^2(x)}dx - \int (1)dx = \int Sec^2(x) - \int dx\\ &\underline{= \mathbf{tg(x) - x} + \mathbb{K}}\end{aligned}$$

3.10. $\int Sec^6(t)dt$

$$\begin{aligned}\int Sec^6(t)dt &= \int Sec^4(t)Sec^2(t)dt\\ &= \int (Sec^2(t))^2 Sec^2(t)dt\\ &= \int (1+tg^2(t))^2 Sec^2(t)dt \qquad\qquad u = tg(t)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad du = Sec^2(t)dt \Rightarrow\\ &= \int (1+u^2)^2 du = \int (1+2u^2+u^4)du\\ &= u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \mathbb{K} \Rightarrow\\ &= \underline{\mathbf{tg(t)} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{tg^3(t)} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{tg^5(t)} + \mathbb{K}}\end{aligned}$$

3.11. $\int_0^{\pi/3} tg^5(x)Sec^4(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} tg^5(x)Sec^4(x)dx &= \int_0^{\pi/3} tg^5(x)Sec^2(x)Sec^2(x)dx\\ &= \int_0^{\pi/3} tg^5(x)(1+tg^2(x))Sec^2(x)dx \qquad\qquad u = tg(x)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad du = Sec^2(x)dx\\ &= \int_0^{\pi/3} u^5(1+u^2(x))du = \int_0^{\pi/3}(u^5+u^7)du\\ &= \frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{8}u^8 = \left(\frac{1}{6}tg^6(x) + \frac{1}{8}tg^8(x)\right)_0^{\pi/3}\\ &= \frac{1}{6}tg^6(\pi/3) + \frac{1}{8}tg^8(\pi/3) - 0\\ &= 4\,.\,5 + 10\,.\,125 = \underline{\frac{\mathbf{117}}{\mathbf{8}}}\end{aligned}$$

3.12. $\int tg^3(x)Sec(x)dx$

Aquí es bueno recordar: $\frac{d}{dx}(Sec(x)) = Sec(x)tg(x)$

$$\int tg^3(x)Sec(x)dx = \int tg^2(x)tg(x)Sec(x)dx$$
$$Sec^2(x) = 1 + tg^2(x) \therefore Sec^2(x) - 1 = tg^2(x) \therefore$$

$$\int (Sec^2(x) - 1)tg(x)Sec(x)dx \qquad u = Sec(x)$$
$$du = Sec(x)tg(x)dx \therefore$$

$$\int (u^2 - 1)du = \frac{1}{3}u^3 - u + \mathbb{K}$$
$$= \underline{\mathbf{\frac{1}{3}Sec^3(x) - Sec(x)} + \mathbb{K}}$$

3.13. $\int xSec(x)tg(x)dx$

Solución: $$\int fg' = fg - \int f'g$$

$f = x$ $\qquad g' = Sec(x)tg(x)$ $\qquad$ Recordar que:

$$\frac{d}{dx}(Sec(x)) = Sec(x)tg(x)$$

$f' = 1$ $\qquad g = Sec(x)$ $\qquad \int Sec(x) = Ln|Sec(x) + tg(x)| + \mathbb{K}$

$$\int xSec(x)tg(x) = xSec(x) - \int Sec(x)dx$$
$$= \underline{\mathbf{xSec(x) - Ln|Sec(x) + tg(x)|} + \mathbb{K}}$$

3.14. $\int Csc(x)dx$

Solución: Para calcular esta integral se requiere:

$$\frac{d}{dx}(Csc(x)) = -Cot(x)Csc(x)$$
$$\frac{d}{dx}(-Cot(x)) = Csc^2(x),$$

Y el truco consiste en:

$$\int (Csc(x))\frac{(Csc(x) - Cot(x))}{(Csc(x) - Cot(x))}dx = \int \frac{(Csc^2(x) - Csc(x)Cot(x))}{(Csc(x) - Cot(x))}dx$$
$$\text{Hagamos: } u = Csc(x) - Cot(x)$$
$$du = (-Cot(x)Csc(x) + Csc^2(x))dx$$
$$du = (Csc^2(x) - Cot(x)Csc(x))dx \therefore$$
$$\int \frac{du}{u} = Ln|u| + \mathbb{K} = \underline{\mathbf{Ln|Csc(x) - Cot(x)|} + \mathbb{K}}$$

3.15. $\int Sen(8x)Cos(5x)dx$

<u>Solución:</u> Aquí es bueno recordar las siguientes identidades:

$$Sen(A)Cos(B) = \frac{1}{2}\left[Sen(A-B) + Sen(A+B)\right]$$
$$Sen(A)Sen(B) = \frac{1}{2}\left[Cos(A-B) - Cos(A+B)\right]$$
$$Cos(A)Cos(B) = \frac{1}{2}\left[Cos(A-B) + Cos(A+B)\right]$$

Es claro que $A = 8x$, $B = 5x$.

$$\int Sen(A)Cos(B)dx = \frac{1}{2}\int \left[Sen(3x) + Sen(13x)\right]dx$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{3}Cos(3x) - \frac{1}{2}\frac{1}{13}Cos(13x) + \mathbb{K}$$
$$= \underline{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{Cos(3x)} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{26}}\mathbf{Cos(13x)} + \mathbb{K}}$$

3.16. $\int Sen(5\theta)Sen(\theta)d\theta$

Solución: Utilizando la segunda igualdad con $A = 5\theta$, $B = \theta$ tenemos:

$$\frac{1}{2}\int [Cos(4\theta) - Cos(6\theta)]d\theta = \underline{\mathbf{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}Sen(4\theta) - \frac{1}{6}Sen(6\theta)\right]} + \mathbb{K}}$$

3.17. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}dt$

Solución: Es claro que:

$$\begin{aligned} t^2 > 1 \Leftrightarrow & t > 1 \text{ ó} \\ & t < -1 \end{aligned}$$

Lo que requiere la sustitución:

$$t = Sec(\theta) \qquad \frac{dt}{d\theta} = Sec(\theta)tg(\theta)$$

$$dt = Sec(\theta)tg(\theta)d\theta$$

no olvidemos: $$Sec^2(\theta) = 1 + tg^2(\theta)$$

Lo que nos lleva a:

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{Sec^3(\theta)\sqrt{Sec^2(\theta) - 1}} Sec(\theta)tg(\theta)d\theta$$

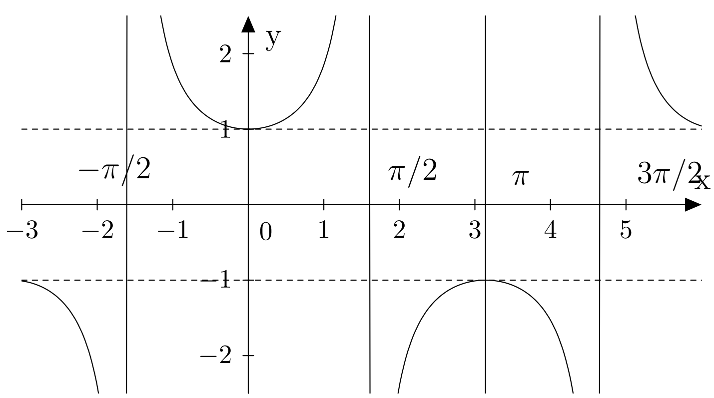


Figura 2: Gráfica de la secante

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{Sec(\theta)tg(\theta)d\theta}{Sec^3(\theta)\sqrt{tg^2(\theta)}} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{Sec(\theta)tg(\theta)d\theta}{Sec^3(\theta)tg(\theta)}$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{Sec^2(\theta)}d\theta = \int_{\sqrt{2}}^{2} Cos^2(\theta)d\theta$$

Vamos a transformar los límites de integración de variable t a variable θ, ya que estamos cerca de la solución:

$$t_0 = \sqrt{2} \quad \therefore \quad \sqrt{2} = \frac{1}{Cos(\theta)} \quad \therefore \quad Cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$t_f = 2 \quad \therefore \quad 2 = \frac{1}{Cos(\theta)} \quad \therefore \quad Cos(\theta) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} Cos^2(\theta)d\theta \qquad \text{Puesto que } Cos(2\theta) = Cos^2(\theta) - Sen^2(\theta)$$
$$Cos(2\theta) = Cos^2(\theta) + Cos^2(\theta) - 1$$
$$= 2Cos^2(\theta) - 1$$
$$\frac{1 + Cos(2\theta)}{2} = Cos^2(\theta)$$

Lo que nos lleva a:

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + Cos(2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}Sen(2\theta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}Sen(\frac{2\pi}{3}) - \frac{1}{2}Sen(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$Sen(\frac{2\pi}{3}) = Sen(\frac{\pi}{3})$$

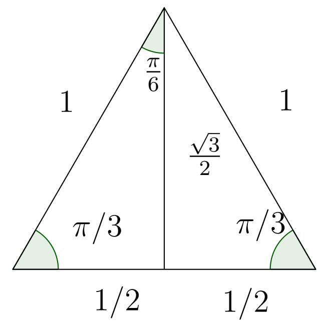


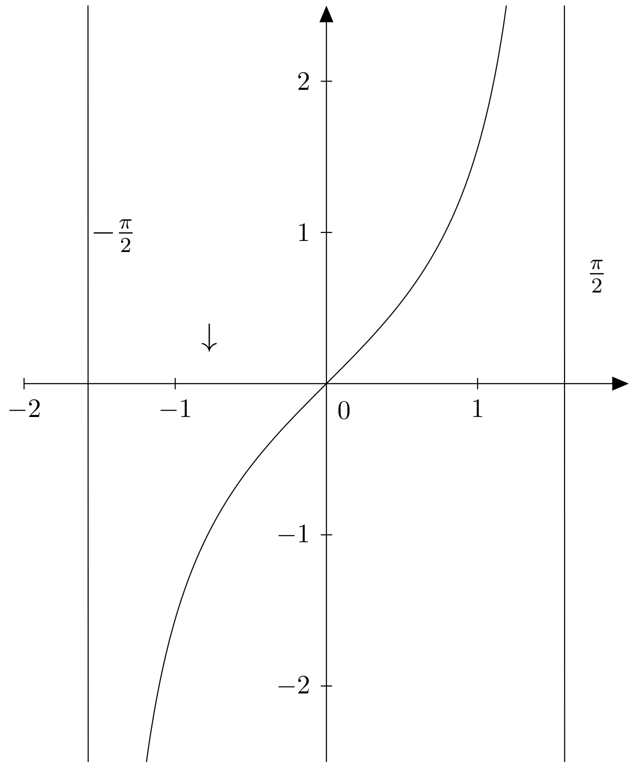
Figura 3: Ilustración

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}(1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\right] \qquad\qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{4}\right] \\
&= \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-2}{4}\right]}}
\end{aligned}
$$

3.18. $\int_0^a \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

Solución: Nuevamente usando sustitución trigonométrica (puesto que hay una raíz cuadrada) tenemos: $x = atg(\theta)$

Figura 4: Gráfica de $tg(\theta)$.



$$\int_0^a \frac{aSec^2(\theta)}{(a^2 + a^2tg^2(\theta))^{3/2}}d\theta$$

Lo que nos lleva a:

$$\int_0^a \frac{aSec^2(\theta)}{\left[\sqrt{a^2 + a^2tg^2(\theta)}\right]^3}d\theta = \int_0^a \frac{aSec^2(\theta)}{(a\sqrt{Sec^2(\theta)})^3}d\theta$$
$$\int_0^a \frac{aSec^2(\theta)}{a^3Sec^3(\theta)}d\theta = \int_0^a \frac{1}{a^2Sec(\theta)}d\theta = \frac{1}{a^2}\int_0^a Cos(\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{a^2}(Sen(\theta))_0^a$$

Debemos cambiar los límites de integración a variable θ o regresar a la variable original. Puesto

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
0 &= atg(\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 0 \\
x_f &= a \\
a &= atg(\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Lo que nos lleva a:

$$= \frac{1}{a^2}(Sen(\theta))_0^{\pi/4} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \underline{\mathbf{\frac{1}{a^2\sqrt{2}}}}$$

3.19. $\int \sqrt{1-4x^2}dx$

<u>Solución:</u>

Los valores de x se restringen a:

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ x = \frac{1}{2}Sen(\theta)$$

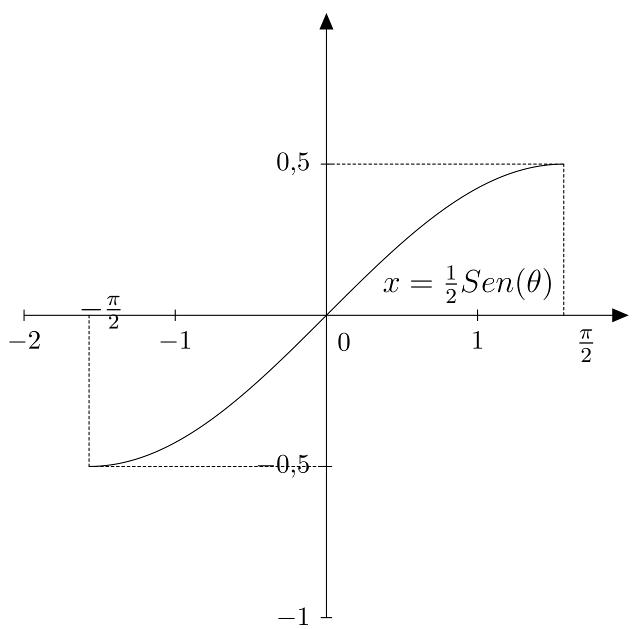


Figura 5: Límites para los valores de x y θ

Lo que nos lleva a:

$$\int \sqrt{1-4\left(\frac{1}{4}Sen^2(\theta)\right)}\overbrace{\frac{1}{2}Cos(\theta)d\theta}^{dx} = \int \sqrt{1-Sen^2(\theta)} * \frac{1}{2}Cos(\theta)d\theta$$
$$= \int \sqrt{Cos^2(\theta)} * \frac{1}{2}Cos(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int Cos^2(\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+Cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{1}{4}\int 1+Cos(2\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{2}\underbrace{Sen(2\theta}_{2Sen(\theta)Cos(\theta)}\right]$$

regresando a la variable original-
se acostumbra cuando la integral es indefinida:

Puesto que:

$$Sen(\theta) = \frac{x}{(\frac{1}{2})} = 2x$$
$$Sen^2(\theta) = 4x^2$$

$$Cos^2(\theta) = 1-4x^2$$
$$Cos(\theta) = \sqrt{1-4x^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[Sen^{-1}(2x) + 2x\sqrt{1-4x^2}\right] + \mathbb{K}$$
$$= \underline{\mathbf{\frac{1}{4}Sen^{-1}(2x) + \frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}} + \mathbb{K}}$$

3.20. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$

<u>Solución:</u> $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3$ ó $x \leq -3$. La sustitución adecuada es $x = 3Sec(\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta} = 3Sec(\theta)tg(\theta)$$
$$dx = 3Sec(\theta)tg(\theta)d\theta$$

$$Sec^2(\theta) = 1 + tg(\theta) \therefore$$

$$\int \frac{\sqrt{9Sec^2(\theta)-9}}{27Sec^3(\theta)}d\theta(3Sec(\theta)tg(\theta))$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{tg^2(\theta)}}{Sec^3(\theta)}Sec(\theta)tg(\theta)d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{tg^2(\theta)}{Sec^2(\theta)}d\theta$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\frac{Sen^2(\theta)}{Cos^2(\theta)}}{\frac{1}{Cos^2(\theta)}}d\theta = \frac{1}{3}\int Sen^2(\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int (1 - Cos^2(\theta))d\theta \qquad Cos(2\theta) = Cos^2(\theta) - Sen^2(\theta)$$

$$Cos(2\theta) = Cos^2(\theta) - (1 - Cos^2(\theta))$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[1 - \frac{1}{2}(1 + Cos(2\theta))\right] d\theta \qquad Cos(2\theta) = 2Cos^2(\theta) - 1$$

$$\frac{1 + Cos(2\theta)}{2} = Cos^2(\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[1 - \frac{1}{2}(1 + Cos(2\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\theta - \frac{1}{2}[\theta + \frac{1}{2}Sen(2\theta)]\right] + \mathbb{K}$$

Puesto que: $\qquad x = 3Sec(\theta) \qquad Cos(\theta) = \frac{3}{x}$

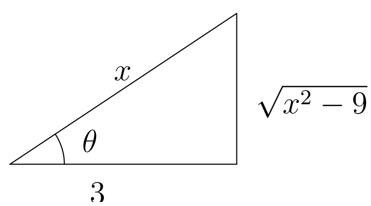


Figura 6: Aplicación de la sustitución trigonométrica

Puesto que la sustitución usada es $Sec(\theta)$, es conveniente que la respuesta vaya en términos de $Sec(\theta)$.

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} * 2Sen(\theta)Cos(\theta)\right] + \mathbb{K}$$
$$\frac{1}{6}\theta - \frac{1}{6}\frac{Sen(\theta)}{Sec(\theta)} + \mathbb{K}$$
$$\frac{1}{6}Sec^{-1}(\frac{x}{3}) - \frac{1}{6}(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x})/(\frac{x}{3}) + \mathbb{K}$$
$$\frac{1}{6}Sec^{-1}(\frac{x}{3}) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + \mathbb{K}$$

3.21. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

Solución:	$x^2 \leq a^2$	$\Leftrightarrow$	$\lvert x\rvert^2 \leq a^2$
Se supone que $a > 0$	$\lvert x\rvert \leq a$	$\Leftrightarrow$	$-a \leq x \leq a$
	$\therefore x = aSen(\theta)$		
	$dx = aCos(\theta)d\theta$		

$$\int_0^a a^2Sen^2(\theta)\sqrt{a^2-a^2Sen^2(\theta)}\,aCos(\theta)d\theta$$
$$= \int_0^a a^2Sen^2(\theta)(a)\sqrt{Cos^2(\theta)}\,aCos(\theta)d\theta$$
$$= a^4\int_0^a Sen^2(\theta)Cos^2(\theta)d\theta = a^4\int_0^a (Sen(\theta)Cos(\theta))^2d\theta$$
$$= a^4\int_0^a \left(\frac{1}{2}Sen(2\theta)\right)^2 d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^a (sen(2\theta))^2d\theta$$

$$Cos(2t) = Cos^2(t) - Sen^2(t)$$
$$Cos(2t) = (1-Sen^2(t)) - Sen^2(t)$$
$$= 1 - 2Sen^2(t)$$
$$2Sen^2(t) = 1 - Cos(2t)$$
$$Sen^2(t) = \frac{1-Cos(2t)}{2}$$

Lo que nos lleva a:

$$\frac{a^4}{4}\int_0^a Sen^2(2\theta)d\theta = \frac{a^4}{4} * \frac{1}{2}\int_0^a (1 - Cos(4\theta))d\theta$$
$$\frac{a^4}{8}\int_0^a (1 - Cos(4\theta)) = \frac{a^4}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}Sen(4\theta)\right]_0^a$$

Recordemos que los valores 0, a están en la variable original, transformémolos a su par en valor θ:

$$x = aSen(\theta) \qquad \therefore \qquad \begin{array}{ccc} x = 0 & \Leftrightarrow & \theta = 0 \\ x = a & \Leftrightarrow & \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^4}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}Sen(4\theta)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{a^4}{8}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}Sen(2\pi) - (0 - 0)\right] \\ &= \underline{\frac{\pi \mathbf{a^4}}{\mathbf{16}}} \end{aligned}$$

3.22. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

Solución:

$$\begin{aligned} x &= tg(\theta) \\ dx &= Sec^2(\theta)d\theta \\ Sec^2(\theta) &= 1 + tg^2(\theta) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+tg^2(\theta)}}{tg(\theta)} Sec^2(\theta) d\theta &= \int \frac{\sqrt{Sec^2(\theta)}Sec^2(\theta)}{tg(\theta)} d\theta \\
&= \int \frac{Sec^3(\theta)}{tg(\theta)} d\theta \\
&= \int \frac{Sec^2(\theta)Sec(\theta)}{tg(\theta)} d\theta \\
\int \frac{(1+\mathrm{tg}^2(\theta))}{tg(\theta)} Sec(\theta) d\theta &= \int \frac{(Sec(\theta)+tg^2(\theta)Sec(\theta))}{tg(\theta)} d\theta \\
&= \int \left(Cot(\theta)Sec(\theta)+tg(\theta)Sec(\theta)\right) d\theta \\
&= \left[\int \frac{Cos(\theta)}{Sen(\theta)} * \frac{d\theta}{Cos(\theta)}\right] + Sec(\theta) + \mathbb{K} \\
&= \left[\int Csc(\theta) d\theta\right] + Sec(\theta) + \mathbb{K} \\
&= Ln|Csc(\theta) - Cot(\theta)| + Sec(\theta) + \mathbb{K}
\end{aligned}
$$

Puesto que: $x = tg(\theta)$

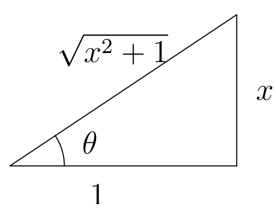


Figura 7: Aplicación de la sustitución trigonométrica

$$
\underline{= \mathbf{Ln}\left|\frac{\sqrt{\mathbf{1+x^2}}}{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right| + \sqrt{\mathbf{1+x^2}} + \mathbb{K}}
$$

3.23. $\int_0^{0,6} \dfrac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}dx$

Solución: Es claro que:

$$\begin{array}{llll} 25x^2 < 9 & \therefore & x^2 < \dfrac{9}{25} & \therefore \\ -\dfrac{3}{5} < x < \dfrac{3}{5} & \therefore & x = \dfrac{3}{5}Sen(\theta) & \\ x = 0 & \therefore & \theta = 0 & \\ x = 0\,.\,6 & \therefore & \theta = \dfrac{\pi}{2} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{(\frac{9}{25})Sen^2(\theta)}{\sqrt{9-(25)(\frac{9}{25})Sen^2(\theta)}}(\frac{3}{5})Cos(\theta)d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{27}{125}Sen^2(\theta)Cos(\theta)}{\sqrt{(9)(1-Sen^2(\theta)}}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}(\frac{27}{125})\frac{Sen^2(\theta)Cos(\theta)}{3Cos(\theta)}d\theta \\
&= (\frac{9}{125})\int_0^{\pi/2} Sen^2(\theta)d\theta \\
&= (\frac{9}{125})\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-Cos(2\theta))d\theta \\
&= (\frac{9}{125})(\frac{1}{2})\int_0^{\pi/2}(1-Cos(2\theta))d\theta \\
&= \frac{9}{125}(\frac{1}{2})\left[\theta - \frac{1}{2}Sen(2\theta)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{9}{125}(\frac{1}{2})[\frac{\pi}{2}] \\
&= \frac{9\pi}{500} \\
&\approx \underline{\mathbf{0\,.\,0565}}
\end{aligned}$$

3.24. $\int \sqrt{5+4x-x^2}dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
-x^2+4x+5 &= -(x^2-4x-5) \\
&= -((x-2)^2-9) \\
&= -\left[(x-2)^2-9\right]
\end{aligned}$$

Sea $u = x-2 \Rightarrow du = dx \therefore$

La integración se convierte en:

$$\int \sqrt{-((x-2)^2-9)}dx = \int \sqrt{-(u^2-9)}du$$

$$\int \sqrt{9-u^2)}du \therefore u = 3Sen(\theta)$$

$$du = 3Cos(\theta)d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9-9Sen^2(\theta)} * 3Cos(\theta)d\theta &= \int \sqrt{9}\sqrt{1-Sen^2(\theta)} * 3Cos(\theta)d\theta \\
&= \int 3\sqrt{Cos^2(\theta)} * 3Cos(\theta)d\theta \\
&= 9\int Cos^2(\theta)d\theta \\
&= 9\int \frac{1}{2}(1+Cos(2\theta))d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int (1+Cos(2\theta))d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}Sen(2\theta)\right] + \mathbb{K}
\end{aligned}$$

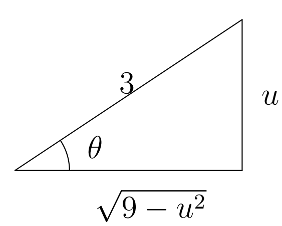


Figura 8: Aplicación de la sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned}
&= \frac{9}{2}\left[Sen^{-1}(\frac{u}{3}) + Sen(\theta)Cos(\theta)\right] + \mathbb{K} \\
&= \frac{9}{2}\left[Sen^{-1}(\frac{u}{3}) + \frac{u}{3} * \frac{\sqrt{9-u^2}}{3}\right] + \mathbb{K} \\
&= \underline{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\left[\mathbf{Sen^{-1}}(\frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{3}}) + \frac{\mathbf{(x-2)}}{\mathbf{9}}\sqrt{\mathbf{9-(x-2)^2}}\right] + \mathbb{K}}
\end{aligned}$$

3.25. $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

Solución: $$\int \sqrt{x^2+2x+1-1}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2-1}\,dx$$

Usando: $u = x+1$ $\quad du = dx \therefore$

$$\int \sqrt{(x+1)^2-1}\,dx = \int \sqrt{u^2-1}\,du$$

Usando ahora: $u = Sec(\theta)$ $\quad Sec^2(\theta) = 1 + tg^2(\theta)$

$$du = Sec(\theta)tg(\theta)d\theta$$

$$\int \sqrt{Sec^2(\theta)-1}Sec(\theta)tg(\theta)d\theta$$

$$\int \sqrt{tg^2(\theta)}Sec(\theta)tg(\theta)d\theta = \int Sec(\theta)tg^2(\theta)d\theta$$

Puesto que $tg^2(\theta) = Sec^2(\theta) - 1$ se tiene:

$$\int Sec(\theta)(Sec^2(\theta)-1)d\theta = \int (Sec^3(\theta) - Sec(\theta))d\theta$$

$\int Sec^3(\theta)d\theta$ ya fue calculada con anterioridad, lo mismo para $\int Sec(\theta)d\theta$ eso conduce a:

$$\frac{1}{2}Sec(\theta)tg(\theta) + \frac{1}{2}Ln|Sec(\theta)+tg(\theta)| - Ln|Sec(\theta)+tg(\theta)| + \mathbb{K}$$

Como: $u = Sec(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad Cos(\theta) = \dfrac{1}{u}$

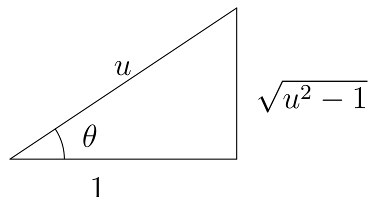


Figura 9: Aplicación de la sustitución trigonométrica

Regresando a la variable u:

$= \dfrac{1}{2}u\sqrt{u^2-1} - \dfrac{1}{2}Ln|u + \sqrt{u^2-1}| + \mathbb{K}$

Regresando a la variable x:

$= \underline{\mathbf{\dfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{(x+1)^2-1} - \dfrac{1}{2}Ln|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}|} + \mathbb{K}}$

3.26. $\int x\sqrt{1-x^4}dx$

$$\int x\sqrt{1-x^4}dx = \int x\sqrt{1-(x^2)^2}dx$$

Solución: Conviene la sustitución:$u = x^2$

$$du = 2xdx$$
$$\frac{du}{2} = xdx \therefore$$

$\frac{1}{2}\int\sqrt{1-u^2}\,du$ es la integral que debo resolver en términos de u, aplicamos ahora la sustitución $u = Sen(\theta)$ $du = Cos(\theta)d\theta$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \sqrt{1 - Sen^2(\theta)}Cos(\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\int \sqrt{Cos^2(\theta)}Cos(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int Cos^2(\theta)d\theta \quad \text{Sabemos que} \quad Cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + Cos(2\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{2}(1 + Cos(2\theta))d\theta\right] = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{2}Sen(2\theta)\right] + \mathbb{K} \\
&= \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}Sen(\theta)Cos(\theta) + \mathbb{K} \\
&= \frac{1}{4}Sen^{-1}(u) + \frac{1}{4}u\sqrt{1 - u^2} + \mathbb{K} \\
&= \underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{Sen^{-1}}(\mathbf{x^2}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{x^2}\sqrt{\mathbf{1 - x^4}} + \mathbb{K}}
\end{aligned}$$

3.27. Un problema frecuente

Un problema frecuente es encontrar el volumen de un toroide. Un toroide se fabrica al girar le círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ alrededor del eje $x, r \leq R$.

Solución: Un toroide básicamente es una dona, un problema que sería las delicias de Homero Simpson, aunque debido a su escasa inteligencia dudo que pudiera resolverlo.

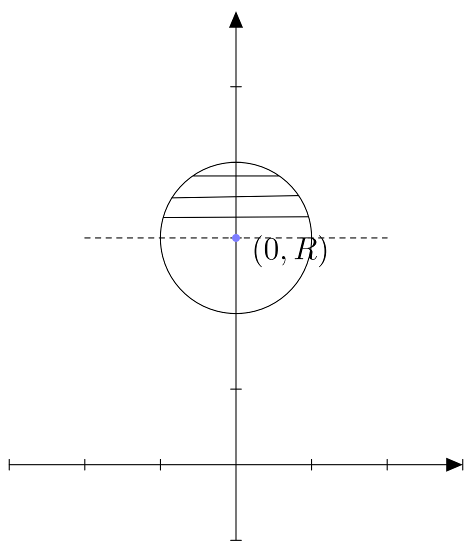


Figura 10: Región de rotación

$$x = \sqrt{r^2 - (y - R)^2}$$

Usando cascarones cilíndricos se tiene:

$$dV = 2\sqrt{r^2-(y-R)^2} * 2\pi(y)dy$$
$$dV = 4\pi y\sqrt{r^2-(y-R)^2}dy$$

Procedemos ahora a usar $v = y - R$

$$dv = dy \Rightarrow$$

$$dV = 4\pi(v+R)\sqrt{r^2-v^2}dv$$
$$dV = 4\pi v\sqrt{r^2-v^2}dv + 4\pi R\sqrt{r^2-v^2}dv$$
$$V = 4\pi\int_{R-r}^{R+r} v\sqrt{r^2-v^2}dv + 4\pi\int_{R-r}^{R+r} R\sqrt{r^2-v^2}dv$$

Los límites de integración están en variable "y", puesto que al final regresaremos a tal variable, no lo modificaremos.

$$u = r^2 - v^2 \qquad v = rSen(\theta)$$
$$du = -2vdv \qquad dv = rCos(\theta)d\theta$$
$$-\frac{du}{2} = vdv$$

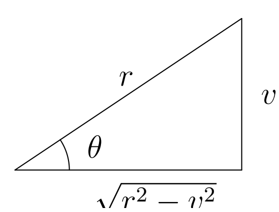


Figura 11: Aplicación de la sustitución trigonométrica

$$V=-\frac{4\pi}{2}\int_{R-r}^{R+r}\sqrt{u}du+4\pi\int_{R-r}^{R+r}R\sqrt{r^2-r^2Sen^2(\theta)}rCos(\theta)d\theta$$
$$V=-2\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{R-r}^{R+r}+4\pi R\int_{R-r}^{R+r}r\sqrt{Cos^2(\theta)}rCos(\theta)d\theta$$
$$V=-2\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{R-r}^{R+r}+4\pi Rr^2\int_{R-r}^{R+r}Cos^2(\theta)d\theta$$
$$V=-2\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{R-r}^{R+r}+4\pi Rr^2\left[\int_{R-r}^{R+r}\frac{1}{2}(1+Cos(2\theta))d\theta\right]$$
$$=-2\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{R-r}^{R+r}+\frac{4\pi Rr^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}Sen(2\theta)\right]_{R-r}^{R+r}$$
$$=-2\pi\left[\frac{2}{3}(r^2-v^2)^{3/2}\right]_{R-r}^{R+r}+2\pi Rr^2\left[Sen^{-1}(\frac{v}{r})+Sen(\theta)Cos(\theta)\right]_{R-r}^{R+r}$$
$$=-\frac{4\pi}{3}\left[(r^2-(y-R)^2)^{3/2}\right]_{R-r}^{R+r}+2\pi Rr^2\left[Sen^{-1}\left(\frac{y-R}{r}\right)+\frac{v}{r}\frac{\sqrt{r^2-v^2}}{r}\right]_{R-r}^{R+r}$$
$$=-\frac{4\pi}{3}[0]+2\pi Rr^2\left[Sen^{-1}\left(\frac{y-R}{r}\right)+\frac{(}{y-R)}r\frac{\sqrt{r^2-(y-R)^2}}{r}\right]_{R-r}^{R+r}$$
$$=2\pi Rr^2\left[Sen^{-1}(1)-Sen^{-1}(-1)\right]$$
$$=2\pi Rr^2\left[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right]=\underline{\mathbf{2\pi^2Rr^2}}$$

4. Fracciones Parciales

4.1. Evalúe $\int\frac{x}{x-6}dx$

Solución: La función racional la expresamos en forma $S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-6) & x \\ & -x+6 \\ \hline & 6 \end{array}$$

$$\frac{x}{x-6}=1+\frac{6}{x-6}$$
$$\int\frac{x}{x-6}=\int\left[1+\frac{6}{x-6}\right]dx \qquad \text{Que se integra fácilmente}$$
$$=\int dx+6\int\frac{dx}{x-6}$$
$$=\underline{\mathbf{x+6Ln|x-6|+\mathbb{K}}}$$

4.2. Evalúe $\int \dfrac{x-9}{(x+5)(x-2)}$

Solución: La potencia del numerador es menor que la del denominador, no hace falta dividir. El denominador $Q(x)$ es producto de factores lineales distintos por lo tanto las fracciones parciales (Caso I) indican:

$$\begin{aligned}
\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} &= \frac{A_1}{x+5} + \frac{A_2}{x-2} \\
&= \frac{A_1(x-2) + A_2(x+5)}{(x+5)(x-2)} \\
x-9 &= (A_1 + A_2)x - 2A_1 + 5A_2 \\
\Rightarrow A_1 + A_2 &= 1 \\
-2A_1 + 5A_2 &= -9 \\
\Rightarrow 7A_2 &= -7 \\
A_2 &= -1 \\
\Rightarrow A_1 &= 2
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned}
\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} &= \frac{2}{x+5} + \frac{-1}{x-2} \therefore \\
\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}dx &= \int \frac{2}{x+5}dx - \int \frac{1}{x-2}dx \\
&= \underline{\mathbf{2Ln|x+5| - Ln|x-2|} + \mathbb{K}}
\end{aligned}$$

4.3. $\int_2^3 \dfrac{1}{x^2-1}dx$

Solución: Factorizando el denominador:

$$
\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x-1)} &= \int_2^3 \left[\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1}\right] dx \\
&= \int_2^3 \left[\frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} dx\right] dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1} dx \\
&= \left[-\frac{1}{2} Ln|x+1| + \frac{1}{2} Ln|x-1|\right]_2^3 \\
&= -\frac{1}{2} Ln|4| + \frac{1}{2} Ln|2| - \left(-\frac{1}{2} Ln|3| + \frac{1}{2} Ln|1|\right) \\
&= -\frac{1}{2} Ln|4| + \frac{1}{2} Ln|2| + \frac{1}{2} Ln|3| - \frac{1}{2} Ln|1| \\
&= -Ln(2) + \frac{1}{2} Ln(2) + \frac{1}{2} Ln(3) \\
&= -Ln(2) + Ln(\sqrt{2}) + Ln(\sqrt{3}) \\
&= Ln(\sqrt{2}\sqrt{3}) - Ln(2) = \underline{\mathbf{Ln(\sqrt{6}) - Ln(2)}}
\end{aligned}
$$

Puesto que $Ln(2) = Ln(\sqrt{4})$ la respuesta anterior se puede expresar así:

$$
\begin{aligned}
&= Ln(\sqrt{6}) - Ln(\sqrt{4}) = Ln(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}) = Ln(\frac{6}{4})^{1/2} \\
&= \underline{\mathbf{\frac{1}{2} Ln(\frac{3}{2})}}
\end{aligned}
$$

4.4. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2 - bx} dx$

<u>Solución:</u>

$$
\begin{aligned}
\int \frac{ax}{x^2 - bx} dx &= \int \frac{ax}{x(x-b)} dx = \int \frac{a}{x-b} dx \\
&= a \int \frac{dx}{x-b} = \underline{\mathbf{aLn|x-b|} + \mathbb{K}}
\end{aligned}
$$

Este ejemplo ilustra que no toda función racional requiere uso de fracciones parciales.

4.5. Evalúe $\int_3^4 \dfrac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx$

Solución: Puesto que el grado del numerador es igual que el denominador se procede a una división primero:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} &= 1+\frac{-4}{x^3-2x^2}\\
\therefore \int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx &= \int_3^4\left[1+\frac{-4}{x^3-2x^2}\right]dx\\
&= \int_3^4\left[1-\frac{4}{x^2(x-2)}\right]dx
\end{aligned}$$

Aquí tenemos el caso de factores lineales repetidos ya que $x^2 = x * x$; este es el caso II de fracciones parciales, se procede así:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2(x-2)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}\\
\frac{1}{x^2(x-2)} &= \frac{A(x)(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}\\
&= \frac{Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2}{x^2(x-2)}
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
A+C&=0\\
-2A+B&=0\\
-2B&=1 \qquad \Rightarrow \qquad B=-\frac{1}{2}, A=-\frac{1}{4}\\
&\qquad\qquad\qquad\quad\; C=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_3^4 \left[1 - \frac{4}{x^2(x-2)}\right] dx &= \int_3^4 1dx - 4\int_3^4 \left[\frac{-1/4}{x} + \frac{-1/2}{x^2} + \frac{1/4}{x-2}\right] dx \\
&= 1 - 4\left[-\frac{1}{4}Ln|x| + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{4}Ln|x-2|\right]_3^4 \\
&= 1 - 4\left[-\frac{1}{4}Ln(4) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}Ln(2) - \left(-\frac{1}{4}Ln(3) + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}Ln(1)\right)\right] \\
&= 1 - \left[-Ln(4) + \frac{1}{2} + Ln(2) + Ln(3) - \frac{2}{3} - 0\right] \\
&= 1 + Ln(4) - \frac{1}{2} - Ln(2) - Ln(3) + \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + Ln(4) - Ln(2) - Ln(3) \\
&= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + Ln(4) - (Ln(2) + Ln(3)) \\
&= \frac{7}{6} + Ln(4) - Ln(6) \\
&= \frac{7}{6} + Ln(\frac{4}{6}) = \underline{\boldsymbol{\frac{7}{6} + \mathbf{Ln}(\frac{2}{3})}}
\end{aligned}
$$

Se deja como inquietud al lector investigar los casos III y IV de fracciones parciales.