UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
**clave-103-1-M-1-00-2018**

| | |
|---|---|
| **CURSO:** | Matemática Básica 2 |
| **SEMESTRE:** | Primero |
| **CÓDIGO DEL CURSO:** | 103 |
| **TIPO DE EXAMEN:** | Primer Examen Parcial |
| **FECHA DE EXAMEN:** | 19 de febrero de 2018 |
| **RESOLVIÓ EL EXAMEN:** | Herber Fernando Sandoval Márquez |
| **DIGITALIZÓ EL EXAMEN:** | Herber Fernando Sandoval Márquez |
| **COORDINADOR:** | Ing. José Alfredo Gonzáles |

# *Primer examen parcial*

Temario B

**Tema 1: (30 puntos)**

a. Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0}(6x^2 + 4\text{x}) \csc x$$

b. Calcule el límite:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - \sqrt{x^4 + 5x^2 + 3})$$

c. Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, encuentre $f'(3)$ utilizando la definición de derivada.

**Tema 2: (20 puntos)**

Encuentre el valor de $c$ de tal forma que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ sea tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$

**Tema 3: (20 puntos)**

a. Calcule la primera derivada de la función $f(x) = \left(\frac{2}{x^3} + 3x^4\right)^5 + cos^3(2x)$

b. Sea $h(x) = g\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)$, donde $f(1) = 2$, $g'(2) = 5$, $f'(1) = -1$, encuentre $h'(1)$

**Tema 4: (15 puntos)**

Hallar los valores de las constantes $a$ y $b$, tal que la función siguiente sea diferenciable en $x = 2$. Encuentre $f'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si \quad x < 2 \\ 2x^2 + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

**Tema 5: (15 puntos)**

a. Trace la gráfica de una función que cumpla con las condiciones dadas:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, $\lim_{n\to 1} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$, $f(-2) = 1$, $f(0) = 3$, $f(1) = 0$

b. Indique en qué puntos es discontinua la función y por qué.

## SOLUCIÓN DEL EXAMEN

**Tema 1: (30 puntos)**

a. Calcule el límite:

$$\lim_{n\to 0}(6x^2 + 4\text{x}) \csc x$$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Aplicando identidad trigonométrica | $= \lim_{x\to 0}(6x^2 + 4\text{x})\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ |
| 2. | Factorizando | $= \lim_{x\to 0} 2(3\text{x} + 2)\left(\frac{x}{\sin x}\right)$ |
| 3. | Aplicando identidad trigonométrica : $\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$ | $= \lim_{x\to 0} 2(3\text{x} + 2)$ |
| 4. | Evaluando el límite | $= \lim_{x\to 0} 2(3(0) + 2) = 4$ |

| | |
|---|---|
| RESPUESTA | $\lim_{n\to 0}(6x^2 + 4\text{x}) \csc x = 4$ |

b. Calcule el límite:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - \sqrt{x^4 + 5x^2 + 3})$$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Multiplicando la expresión por su conjugado | $= \lim_{x\to\infty}(x^2 - \sqrt{x^4 + 5x^2 + 3}) * \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 5x^2 + 3}}{x^2 + \sqrt{x^4 + 5x^2 + 3}}$ |
| 2. | Factorizando y multiplicando por: $\frac{1/x^2}{1/x^2}$ | $= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^4 - 5x^2 - 3}{x^2 + \sqrt{x^4 + 5x^2 + 3}} * \frac{1/x^2}{1/x^2}$ |
| 3. | Se obtiene | $= \lim_{x\to\infty} \frac{-5 - \frac{3}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^4}}}$ |
| 4. | Evaluando el límite | $= \lim_{x\to\infty} \frac{-5 - \frac{3}{(+\infty)^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{(+\infty)^2} + \frac{3}{(+\infty)^4}}} = -\frac{5}{2}$ |

| | |
|---|---|
| RESPUESTA | $\lim_{x\to\infty}(x^2 - \sqrt{x^4 + 5x^2 + 3}) = -\frac{5}{2}$ |

c. Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, encuentre $f'(3)$ utilizando la definición de derivada.

| **No.** | **Explicación** | **Operatoria** |
|---|---|---|
| 1. | Definición de derivada | $f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ |
| 2. | Definiendo expresiones | $f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{x+h+1}}$ <br> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ |
| 3. | Sustituyendo en la derivada | $f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{h}$ |
| 4. | Simplificando se obtiene | $f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+h+1}}{h\sqrt{(x+h+1)(x+1)}}$ |
| 5. | Multiplicando por el conjugado del denominador | $f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+h+1}}{h\sqrt{(x+h+1)(x+1)}} * \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}}$ |
| 6. | Simplificando se obtiene | $f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1})\sqrt{(x+h+1)(x+1)}}$ |
| 7. | Evaluando el límite | $f'(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+(0)+1})\sqrt{(x+(0)+1)(x+1)}}$ <br> $f'(x) = \frac{-1}{(2\sqrt{x+1})(x+1)}$ <br> $f'(x) = \frac{-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ |
| 8. | Evaluando: $f'(3)$ | $f'(3) = \frac{-1}{2(3+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{16}$ |

| | |
|---|---|
| RESPUESTA | $f'(3) = -\frac{1}{16}$ |

## Tema 2: (20 puntos)

Encuentre el valor de $c$ de tal forma que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ sea tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Se obtiene la derivada de la curva | $y' = c\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$<br>$y' = \frac{c}{2\sqrt{x}}$ |
| Para ser tangentes en un punto deben cumplir dos condiciones: | | |
| 2. | Primero: Las pendientes deben ser iguales | $y' = \frac{3}{2}$<br>$\frac{c}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}$<br>$2c = 6\sqrt{x}$<br>$\boldsymbol{c = 3\sqrt{x}}$ |
| 3. | Segundo: Las imágenes deben ser iguales | $y = y$<br>$\boldsymbol{\frac{3}{2}x + 6 = c\sqrt{x}}$ |
| 4. | Sustituyendo $\boldsymbol{c = 3\sqrt{x},}$ en la expresión anterior | $\frac{3}{2}x + 6 = (3\sqrt{x})\sqrt{x}$<br>$\frac{3}{2}x + 6 = 3x$<br>$6 = 3x - \frac{3}{2}x$<br>$6 = \frac{3}{2}x$<br>$x = 4$ |
| 5. | Evaluando $c$ | $c = 3\sqrt{(4)} = 6$ |

| | |
|---|---|
| RESPUESTA | $c = 6$ |

**Tema 3: (20 puntos)**

a. Calcule la primera derivada de la función $f(x) = (\frac{2}{x^3} + 3x^4)^5 + cos^3(2x)$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Aplicando la regla de la cadena para ambos factores | $f'(x) = 5\left(\frac{2}{x^3} + 3x^4\right)^4 * \left(\frac{-(2)(3)x^2}{x^6} + 12x^3\right) + 3cos^2(2x)(-2\sin(2x))$ |
| 2. | Simplificando la expresión | $f'(x) = 5\left(\frac{2}{x^3} + 3x^4\right)^4 * \left(12x^3 - \frac{6}{x^4}\right) - 6cos^2(2x)\sin(2x)$ |

| RESPUESTA | $f'(x) = 5\left(\frac{2}{x^3} + 3x^4\right)^4 * \left(12x^3 - \frac{6}{x^4}\right) - 6cos^2(2x)\sin(2x)$ |
|---|---|

a. Sea $h(x) = g\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)$, donde $f(1) = 2$, $g'(2) = 5$, $f'(1) = -1$, encuentre $h'(1)$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Aplicando la regla de la cadena para $h(x)$, seguido de regla del cociente para $g(x)$ | $h'(x) = g'\left(\frac{f(x)}{x^2}\right) * \left(\frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4}\right)$ |
| 2. | Evaluando | $h'(1) = g'\left(\frac{f(1)}{(1)^2}\right) * \left(\frac{x^2f'(1) - 2(1)f(1)}{(1)^4}\right)$ |
| 3. | Utilizando la información proporcionada | $h'(1) = g'\left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{(1)(-1) - 2(1)(2)}{1}\right)$<br>$h'(1) = (5)(-1-4)$<br>$h'(1) = -25$ |

| RESPUESTA | $h'(1) = -25$ |
|---|---|

**Tema 4: (15 puntos)**

Hallar los valores de las constantes $a$ y $b$, tal que la función siguiente sea diferenciable en $x = 2$. Encuentre $f'(x)$

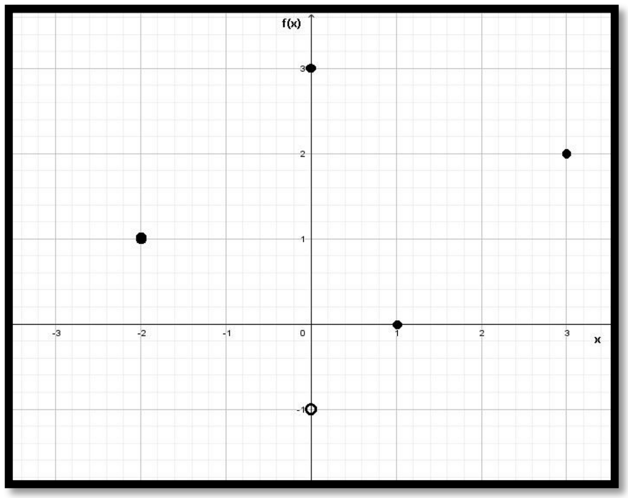
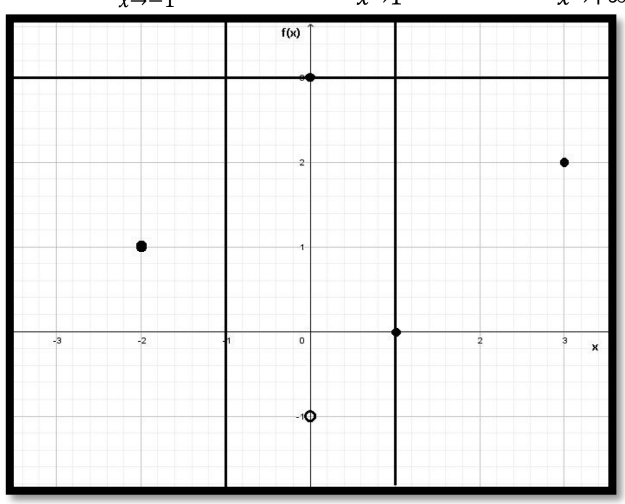
$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si \quad x < 2 \\ 2x^2 + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

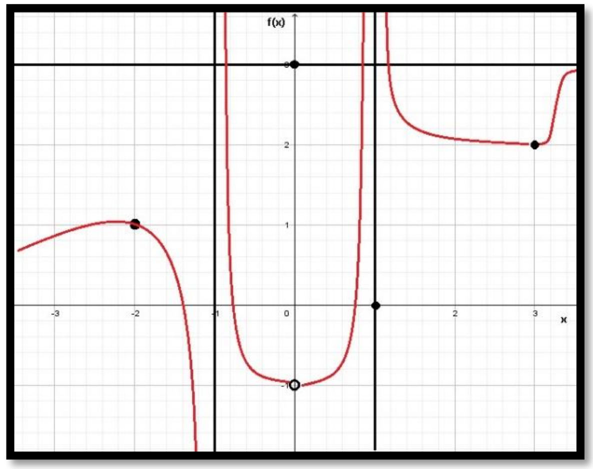
| **No.** | **Explicación** | **Operatoria** |
|---|---|---|
| Para que la función sea diferenciable en la frontera dada debe cumplir dos condiciones: | | |
| 1. | Primero: Límites por la izquierda y por la derecha deben ser iguales | $\lim_{x\to 2^-}(\mathrm{ax+b}) = \lim_{x\to 2^+}(2x^2+1)$ <br> $a(2) + b = 2(2) + 1$ <br> $\boldsymbol{2a + b = 9}$ |
| 2. | Segundo: La derivada evaluada en la frontera debe ser igual para ambas partes de la función | $\left.\frac{d(ax+b)}{dx}\right\|_{x=2} = \left.\frac{d(2x^2+1)}{dx}\right\|_{x=2}$ <br> $a_{x=2} = 4x_{x=2}$ <br> $a = 4(2)$ <br> $\boldsymbol{a = 8}$ |
| 3. | Sustituyendo $a$ en la primera expresión | $2(8) + b = 9$ <br> $\boldsymbol{b = -7}$ |
| 4. | Habiendo determinado las derivadas en el paso 2 se sustituyen $a$ y $b$ | $f'(x) = \begin{cases} a & si \quad x < 2 \\ 4x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ <br> $\boldsymbol{f'(x) = \begin{cases} 8 & si \quad x < 2 \\ 4x & si \quad x \geq 2 \end{cases}}$ |

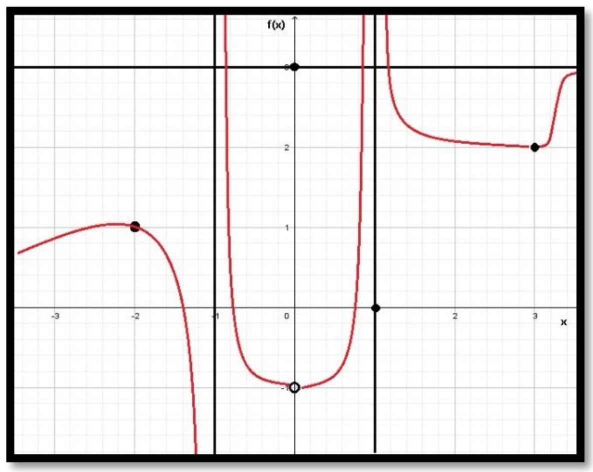
| | |
|---|---|
| RESPUESTA | $a = 8, b = -7$ <br> $f'(x) = \begin{cases} 8 & si \quad x < 2 \\ 4x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ |

**Tema 5: (15 puntos)**

a. Trace la gráfica de una función que cumpla con las condiciones dadas:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$, $f(-2) = 1$, $f(0) = 3$, $f(1) = 0$

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Se ubican los puntos por donde pasa la curva en un solo eje de coordenadas | $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$, $f(-2) = 1$, $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$  |
| 2. | Se procede a identificar las asíntotas de la función | $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$  |

| | | |
|---|---|---|
| 3. | Se realiza el trazo final basándose en las condiciones restantes | $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$   |

| | |
|---|---|
| RESPUESTA |   |

b. Indique en qué puntos es discontinua la función y por qué.

| No. | Explicación | Operatoria |
|---|---|---|
| 1. | Discontinuidad por ser asíntota vertical | $x = -1$ |
| 2. | Discontinuidad por agujero | $x = 0$ |
| 3. | Discontinuidad por ser asíntota vertical | $x = 1$ |

| | |
|---|---|
| RESPUESTA | $Discontinua\ en: x = -1, x = 0, x = 1$ |