UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE 103-1-M-1-06-2017

CURSO:	Matemática Básica 2
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	103
TIPO DE EXAMEN:	Primer parcial
FECHA DE EXAMEN:	09 de junio del 2017
PERSONA QUE ELABORÓ LA CLAVE:	María José Alburez García
PERSONA QUE REVISÓ LA CLAVE:	Ing. Miguel Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA — JUNIO 2017
FACULTAD DE INGENIERÍA — TEMARIO H
ESCUELA TÉCNICA
MATEMÁTICA BÁSICA 2

PRIMER EXAMEN PARCIAL

TEMA No. 1: (15 puntos)

Trace la gráfica que cumpla con las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to5} f(x)=1;\ \lim_{x\to3+} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to3-} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to1+} f(x)=2;\ \lim_{x\to1-} f(x)=3;\ \lim_{x\to0+} f(x)=-\infty;\ f(1)\nexists;\ f'(5)=0$$

TEMA No. 2: (20 puntos)

x	f(x)	g(x)	r(x)	$\frac{df}{dx}$	$\frac{dg}{dx}$	$\frac{dr}{dx}$
1	5	2	4	1	7	3
2	3	0	6	2	0	6

a. Sea $W(x)=\frac{f(g(x))f(x)}{r(x)}$, determine $\frac{dw}{dx}(1)$

b. $f'(x)\ si\ f(x)=2\sqrt{x}+\frac{kx}{senx}+cot^2(x^3)$

TEMA No. 3: (15 puntos)

Encuentre una ecuación de cada una de las rectas tangentes a la curva $y=-x^2+4$ que pasan por el punto (5,0).

TEMA No. 4: (30 puntos)

a. $\lim_{x\to0}\frac{1-\sec(2x)}{xsec(2x)}$

b. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-ax}+2x$

c. Usando la definición de derivada como límite, calcule $D_x\left[\frac{1}{1+x}\right]$

TEMA No. 5: (20 puntos)

a. Determine los valores de m y b que hacen que f sea continua y derivable en R

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ si\ x\le 3 \\ mx+b\ si\ x>3 \end{cases}$$

b. Trace la gráfica de f y f´ después de encontrar los valores de m y b

TEMA 1

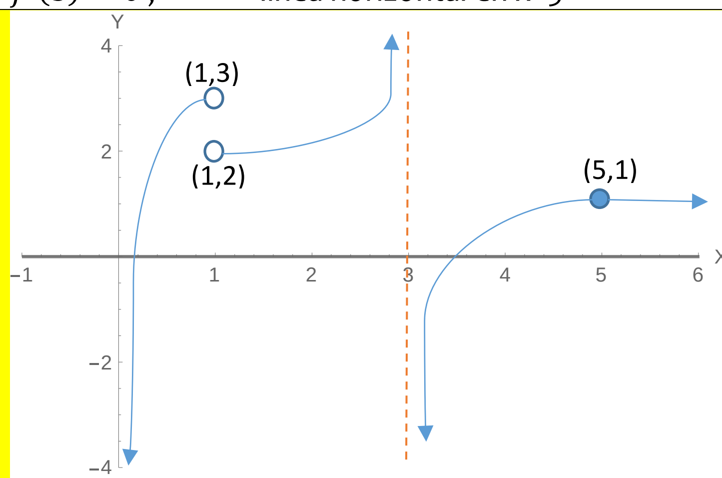
Trace la gráfica que cumpla con las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to5} f(x)=1;\ \lim_{x\to3+} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to3-} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to1+} f(x)=2;\ \lim_{x\to1-} f(x)=3;\ \lim_{x\to0+} f(x)=-\infty;\ f(1)\nexists;\ f'(5)=0$$

<table>
<tr><th>#</th><th>Descripción</th><th>Operación</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se analiza qué asíntotas y puntos tendrá la gráfica para comprender su tendencia.</td><td>

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;$ asíntota en y=0
$\lim_{x\to5} f(x)=1;$ punto relleno en (5,1)
$\lim_{x\to3+} f(x)=-\infty;$ asíntota en x=3
$\lim_{x\to3-} f(x)=+\infty;$ asíntota en x=3
$\lim_{x\to1+} f(x)=2;$ punto sin rellenar en (1,2)
$\lim_{x\to1-} f(x)=3;$ punto sin rellenar en (1,3)
$\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty;$ asíntota en x=0
$f(1)\nexists;$ no hay imagen en x=1
$f'(5)=0\,;$ línea horizontal en x=5

</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Se realiza la gráfica.</td><td>



</td></tr>
</table>

TEMA 2

x	f(x)	g(x)	r(x)	$\frac{df}{dx}$	$\frac{dg}{dx}$	$\frac{dr}{dx}$
1	5	2	4	1	7	3
2	3	0	6	2	0	6

a. Sea $W(x)=\frac{f(g(x))f(x)}{r(x)}$, determine $\frac{dw}{dx}(1)$

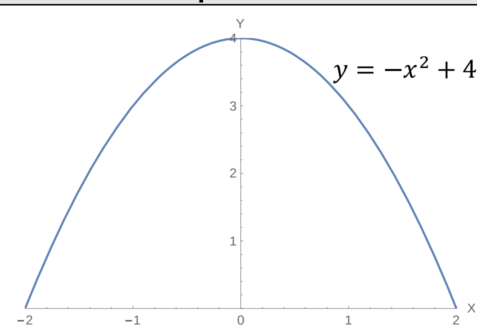
#	Descripción	Operación
1.	Se procede a derivar W(x).	$\frac{dw}{dx}=\frac{d\big(f(g(x))f(x)\big)r(x)-r'(x)f(g(x))f(x)}{(r(x))^2}$ $\frac{dw}{dx}=\frac{\big(f'(x)f\big(g(x)\big)+f(x)f'\big(g(x)\big)g'(x)\big)r(x)-r'(x)f(g(x))f(x)}{(r(x))^2}$
2.	Luego, se evalúa x=1 en la derivada, sustituyendo valores encontrados en la tabla.	$\frac{dw}{dx}(1)=\frac{\big(f'(1)f\big(g(1)\big)+f(1)f'\big(g(1)\big)g'(1)\big)r(1)-r'(1)f(g(1))f(1)}{(r(1))^2}$ $\frac{dw}{dx}(1)=\frac{(1*3+5*2*7)*4-3*3*5}{(4)^2}=\frac{247}{16}$
$\frac{dw}{dx}(1)=\frac{247}{16}$		

b. $f'(x)\ si\ f(x)=2\sqrt{x}+\frac{kx}{senx}+cot^2(x^3)$

#	Descripción	Operación
1.	Se deriva la función haciendo uso de la regla de la cadena.	$f(x)=2\sqrt{x}+\frac{kx}{senx}+cot^2(x^3)$ $f'(x)=x^{-1/2}+\left(\frac{ksenx-kxcosx}{(senx)^2}\right)+2(\cot(x^3))*\left(-csc^2(x^3)\right)*3x^2$
$f'(x)=x^{-1/2}+\left(\frac{ksenx-kxcosx}{(senx)^2}\right)+2(\cot(x^3))*\left(-csc^2(x^3)\right)*3x^2$		

TEMA 3

Encuentre una ecuación de cada una de las rectas tangentes a la curva $y=-x^2+4$ que pasan por el punto (5,0).

#	Descripción	Operación
1.	Se realiza la gráfica de la curva.	

2.	Se deriva la ecuación de la curva.	$y = -x^2 + 4$ $y' = -2x$
3.	Se plantea la ecuación de la recta, reemplazando la pendiente como la derivada obtenida en el paso anterior y utilizando el punto (5,0) como punto inicial.	$(y - y_0) = m(x - x_0)$ $(y - 0) = (-2x)(x - 5)$ $y = (-2x)(x - 5)$
4.	Se plantea la ecuación de la pendiente, reemplazando "y" con la ecuación de la curva y utilizando el punto (5,0) como punto inicial.	$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ $m = \frac{(-x^2 + 4) - 0}{x - 5}$
5.	Se iguala la derivada de la curva con la expresión obtenida de la pendiente.	$-2x = \frac{-x^2 + 4}{x - 5}$
6.	Se resuelve la ecuación para obtener los puntos de tangencia.	$-2x = \frac{-x^2 + 4}{x - 5}$ $-2x^2 + 10x + x^2 - 4 = 0$ $-x^2 + 10x - 4 = 0$ $x_1 = 5 + \sqrt{21}$ $x_2 = 5 - \sqrt{21}$
7.	Se completan las ecuaciones de las rectas reemplazando "x" con los valores obtenidos en el paso anterior.	1era. ecuación: $y_1 = (-2(5 + \sqrt{21}))(x - 5)$ 2da. Ecuación: $y_2 = (-2(5 - \sqrt{21}))(x - 5)$
		$y_1 = (-2(5 + \sqrt{21}))(x - 5)$ $y_2 = (-2(5 - \sqrt{21}))(x - 5)$

TEMA 4

a. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec(2x)}{x sec(2x)}$

#	Descripción	Operación
1.	Se reemplaza la función "sec(2x)" por su equivalente "1/cos(2x)" y se simplifica la expresión.	$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec(2x)}{x sec(2x)} =$ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos(2x)}}{\frac{x}{\cos(2x)}} =$ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos(2x) - 1}{\cos(2x)}}{\frac{x}{\cos(2x)}} =$ $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x}$

2.	Se reemplaza la expresión " $\cos(2x)-1$"por su equivalente "-(-cos(2x) +1)".	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(-\cos(2x)+1)}{x}$
3.	Se multiplica la expresión por el factor "2/2" para completar la identidad trigonométrica "(1-cos(2x)) /2x=0".	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(-\cos(2x)+1)}{x}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(-\cos(2x)+1)}{x}*\frac{2}{2}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2(1-\cos(2x))}{2x}=$ $\lim\limits_{x\to 0}-2(0)=0$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec(2x)}{x sec(2x)}=0$		

b. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-ax}+2x$

#	Descripción	Operación
1.	Se multiplica por el conjugado para completar una diferencia de cuadrados.	$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-ax}+2x=$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-ax}+2x$ $*\frac{\sqrt{4x^2-ax}-2x}{\sqrt{4x^2-ax}-2x}=$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4x^2-ax-4x^2}{\sqrt{4x^2-ax}-2x}=$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-ax}{\sqrt{4x^2-ax}-2x}$
2.	Se multiplica por el factor "(1/-x) /(1/$\sqrt{(\text{-x})^2}$)" y se simplifica la expresión.	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-ax}{\sqrt{4x^2-ax}-2x}=$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-ax}{\sqrt{4x^2-ax}-2x}*\frac{\frac{1}{-x}}{\frac{1}{\sqrt{(-x)^2}}}=$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\frac{-ax}{(-x)}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{ax}{x^2}}-\frac{2x}{(-x)}}=$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{a}{\sqrt{4-\frac{a}{x}}+2}$
3.	Se observa que "a/x" tiende a 0 por lo que se simplifica nuevamente la expresión.	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{a}{\sqrt{4-\frac{a}{x}}+2}=$

		$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a}{\sqrt{4-0}+2}=$$ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-ax}+2x=\frac{a}{4}$$		

c. Usando la definición de derivada como límite, calcule $D_x\left[\frac{1}{1+x}\right]$

#	Descripción	Operación
1.	Se emplea la definición de derivada para la función.	$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+(x+h)}-\frac{1}{1+x}}{h}$$
2.	Se simplifica la expresión resultante.	$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+(x+h)}-\frac{1}{1+x}}{h}=$$ $$\lim_{h\to0}\frac{\frac{1+x-1-x-h}{1+x+h+x+x^2+xh}}{h}=$$ $$\lim_{h\to0}\frac{\frac{-h}{1+2x+h+x^2+xh}}{h}=$$ $$\lim_{h\to0}\frac{-1}{1+2x+h+x^2+xh}$$
3.	Se evalúa el límite con h=0 y se simplifica.	$$\lim_{h\to0}\frac{-1}{1+2x+h+x^2+xh}=$$ $$\frac{-1}{1+2x+0+x^2+x(0)}=$$ $$\frac{-1}{x^2+2x+1}=$$ $$\frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$D_x\left[\frac{1}{1+x}\right]=\frac{-1}{(x+1)^2}$$		

TEMA 5

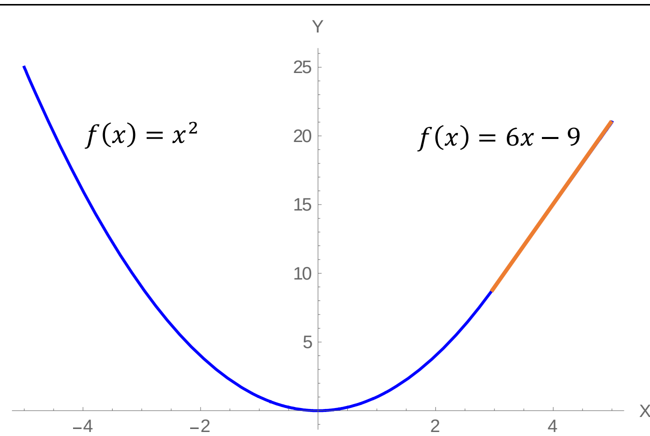
a. Determine los valores de m y b que hacen que f sea continua y derivable en R

$$f(x)=\begin{cases}x^2 \; si \; x\le 3\\ mx+b \; si \; x>3\end{cases}$$

#	Descripción	Operación
1.	Se iguala el límite cuando "x" tiende a 3 por la izquierda con el límite	$$\lim_{x\to3-}x^2=\lim_{x\to3+}mx+b=$$ $$9=3m+b$$

	cuando "x" tiende a 3 por la derecha y se evalúan.	
2.	Se derivan ambas funciones y se igualan.	$2x = m$
3.	Se evalúa x=3 en la expresión anterior para obtener el valor de "m".	$m = 2(3) = 6$
4.	Se obtiene el valor de "b" reemplazando el valor de "m" en la expresión del paso 1.	$9 = 3(6) + b$ $b = 9 - 18 = -9$
$m = 6$ $b = -9$		

b. Trace la gráfica de f y f´ después de encontrar los valores de m y b

#	Descripción	Operación
1.	Se reemplazan los valores de "m" y "b" para obtener la forma de la segunda función.	$f(x) = mx + b \; si \; x > 3$ $f(x) = 6x - 9 \; si \; x > 3$
2.	Se grafican ambas funciones.	

3.	Se grafican ambas derivadas.