UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

clave-103-1-V-2-00-2017

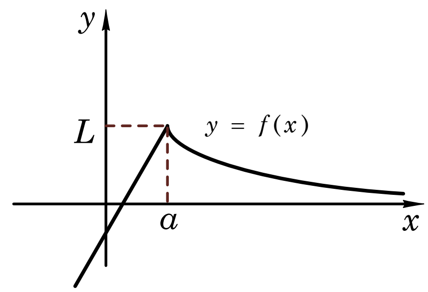
CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	Segundo
CÓDIGO DEL CURSO:	103
TIPO DE EXAMEN:	Primer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	16 de agosto del 2017
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

Primer examen parcial

Temario V

Tema 1: (20 puntos)

Determine cuales de las siguientes condiciones son aplicables a la gráfica dada.



a. $f(a)$ no está definida.

b. $f(a) = L$

c. f es continua en $x = a$

d. $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

e. $\lim_{x \to a} f(x) = L$

f. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

g. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

h. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Tema 2: (33 puntos)

Utilice procedimientos algebraicos y las reglas de los límites para evaluar

a. $\lim_{x \to 1} \dfrac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$ **b.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{2\,\text{sen}\, 4x + 1 - \cos x}{x}$ c. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right)$

Tema 3: (25 puntos)

Dada la función $f(x) = x^2 + x + 1$

a. Obtenga $f'(x)$ utilizando la definición de derivada.

b. Obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada, si dicha recta pasa por el punto $(-1,0)$

Tema 4: (22 puntos)

a. Sea $F(x) = \dfrac{x^2 f(x)}{g(x)}$

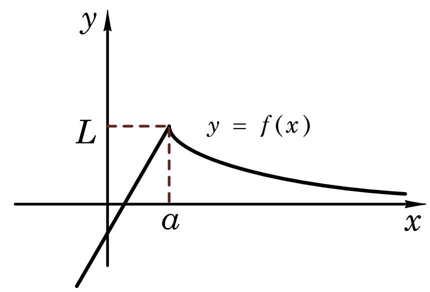
Obtenga $F'(2)$ si $f(2) = 1$, $f'(2) = 5$, $g(2) = 2$ y $g'(2) = -3$

b. Obtenga $f'(x)$ si $f(x) = \tan\left(\cos\sqrt{2x + 5}\right)$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (20 puntos)

Determine cuales de las siguientes condiciones son aplicables a la gráfica dada.



a. $f(a)$ no está definida.

b. $f(a) = L$

c. f es continua en $x = a$

d. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

e. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

f. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

g. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

h. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

a. $f(a)$ no está definida.

No.	Explicación	Operatoria
1.	El punto pertenece al dominio y tiene una imagen	Está definida

RESPUESTA	$f(a)$ no está definida. = falso, si está definida

b. $f(a) = L$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se valúa el punto a en la función y=f(x)	Y=f(a)
2.	Observando en la gráfica se determina el valor de f(a)	F(a)=L

RESPUESTA	$f(a) = L$ = *si cumple*

c. *f* es continua en $x = a$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se observa en la gráfica que para todos los valores del	$f(x) = y$

	dominio de la función f(x) corresponde una imagen, y la función no tiene discontinuidades ni saltos.	

RESPUESTA	*f* es continua en $x = a$ = Verdadero, si cumple

d. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se observa el valor de f(x) resultante en la gráfica al acercarse en el valor de a por la derecha.	$\lim\limits_{a^+} f(x) = f(a)$
2.	Se sustituye el valor de a en la grafica y se obtiene el valor de y en la función.	f(a)=L

RESPUESTA	$\lim\limits_{a^+} f(x) = L$ = si cumple el limite lateral

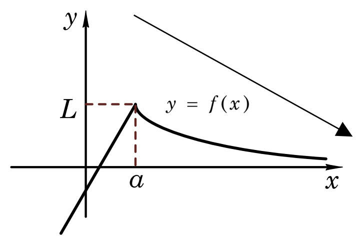
e. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se observa el valor de f(x) resultante en la gráfica al acercarse en el valor de a por la derecha y por la izquierda.	$\lim\limits_{a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{a^-} f(x) = f(a)$
2.	Se observa si ambos limites	f (a^+)=L y f (a^-)= L

	laterales llegan a un mismo punto	

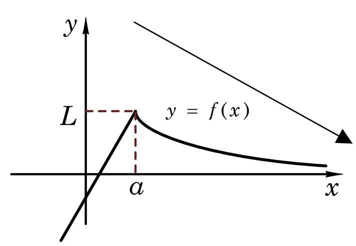
RESPUESTA	$\lim_{a} f(x) = L$ = si cumple.

f. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se observa el valor de f(x) resultante en la gráfica al desplazarse sobre ella hacia la derecha, llegando al ∞	
2.	Se determina la tendencia que toma la gráfica en su último valor.	Tiende a 0

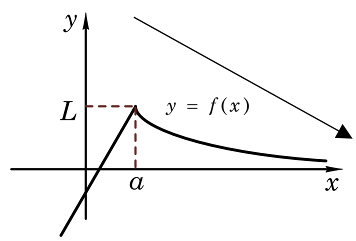
RESPUESTA	$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ = Falso, No cumple

g. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se observa el valor de f(x) resultante en la gráfica al desplazarse sobre ella hacia la derecha, llegando al ∞	
2.	Se determina la tendencia que toma la gráfica en su último valor.	Tiende a 0

RESPUESTA	$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ = Falso, No cumple tiende a 0

h. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se observa el valor de f(x) resultante en la gráfica al desplazarse sobre ella hacia la derecha, llegando al ∞	
2.	Se determina la tendencia que toma la gráfica en su último valor.	Tiende a 0

RESPUESTA	a. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ = Verdadero, si cumple.

Tema 2: (33 puntos)

Utilice procedimientos algebraicos y las reglas de los límites para evaluar

a. $\lim_{x \to 1} \frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$ **b.** $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 4x + 1 - \cos x}{x}$ c. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right)$

a. $\lim_{x \to 1} \frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentran las posibles	

	raíces del denominador y se deja expresado, se realiza el conjugado	$\lim_{x-1} \frac{4-\sqrt{x+15}}{(x+1)(x-1)} * \frac{4+\sqrt{x+15}}{4+\sqrt{x+15}}$
2.	Se realizan los procedimientos algebraicos, eliminando la raíz del denominador	$\lim_{x-1} \frac{16-x-15}{(x+1)(x-1)} * \frac{1}{4+\sqrt{x+15}}$
3.	Se simplifica la operación.	$\lim_{x-1} \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)(4+\sqrt{x+15})}$
4.	Se eliminan los factores comunes.	$\lim_{x-1} \frac{-1}{(x+1)(4+\sqrt{x+15})}$
5.	Se sustituye el valor de x en el límite simplificado.	$\lim_{x-1} \frac{-1}{(1+1)(4+\sqrt{1+15})} = -\frac{1}{16}$

RESPUESTA	$\lim_{x \to 1} \frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1} = -\frac{1}{16}$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 4x + 1 - \cos x}{x}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Separamos el límite en 2, para poder observar la identidad trigonométrica.	$\lim_{x-0} \frac{2 \sin 4x}{x} + \frac{1-\cos x}{x}$
2.	Se identifica la identidad: $\frac{1-\cos x}{x} = 0$ y se multiplica por 4 el límite resultante	$\lim_{x-0} \frac{4 * 2 \sin 4x}{4 * x} + 0$

3.	Se obtiene la identidad: $\frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x-0} 8 * \frac{\sin 4x}{4x} + 0$
4.	se opera aritméticamente	$\lim_{x-0} 8(1) + 0 = 8$

RESPUESTA	$\lim_{x-0} \frac{2\sin 4x + 1 - \cos x}{x} = 8$

c. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x\right)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Operamos por el conjugado.	$\lim_{x-\infty} (\sqrt{x^2+5x} - x) * (\frac{\sqrt{x^2+5x}+x}{\sqrt{x^2+5x}+x})$
2.	Se opera el algebra.	$\lim_{x-\infty} \frac{x^2 + 5x - x^2}{\sqrt{x^2+5x} + x}$
3.	Se simplifica la operación y se multiplica por el factor: $\frac{1}{x}$	$\lim_{x-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x} * (\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}})$
4.	se opera algebraicamente	$\lim_{x-\infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1}$
5.	Se sustituye el valor por el que tiende x	$\lim_{x-\infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{\infty}} + 1}$
6.	Se analiza que todo numero dividido infinito es 0	$\lim_{x-\infty} \frac{5}{\sqrt{1+0} + 1}$
7.	Se realiza el procedimiento aritmético.	$\lim_{x-\infty} \frac{5}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{5}{2}$

RESPUESTA	$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x\right) = \frac{5}{2}$

Tema 3: (25 puntos)

Dada la función $f(x) = x^2 + x + 1$

a. Obtenga $f'(x)$ utilizando la definición de derivada.

b. Obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada, si dicha recta pasa por el punto $(-1,0)$

a. Obtenga $f'(x)$ utilizando la definición de derivada.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Conociendo la definición de la derivada: $f'(x) = \lim_{h-0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, reconocemos los valores a sustituir en la definición	$f(x+h) = (x+h)^2 + x + h + 1$ $f(x) = x^2 + x + 1$
2.	Sustituimos lo valores en la definición de derivada.	$f'(x) = \lim_{h-0} \frac{(x+h)^2 + x + h + 1 - (x^2 + x + 1)}{h}$
3.	Se simplifica la expresión realizando el procedimiento algebraico.	$f'(x) = \lim_{h-0} \frac{2xh + h^2 + h}{h}$
4.	S factoriza el valor de h y se simplifica la expresión.	$f'(x) = \lim_{h-0} \frac{h(2x + h + 1)}{h}$
5.	Se sustituye el valor por el que tiende h	$f'(x) = \lim_{h-0} 2x + 0 + 1$
6.	Se obtiene la derivada de la función por definición.	$f'(x) = 2x + 1$

RESPUESTA	$f'(x) = 2x + 1$

b. Obtenga la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada, si dicha recta pasa por el punto $(-1,0)$

c. No.	Explicación	Operatoria
1.	Establecemos la ecuación de la recta	$y - y_0 = m(x - x_0)$
2.	Conocemos el punto por el que pasa la recta	$y - 0 = m(x - (-1))$
3.	Se simplifica la expresión.	$y = m(x+1)$
4.	Conocemos la otra función y la igualamos con la recta para conocer su intersección	$f(x) = y$ $x^2 + x + 1 = m(x+1)$
5.	La pendiente de la recta debe ser igual a la derivada de la función en ese punto, por lo tanto, se sustituye	$m = 2x + 1$ $x^2 + x + 1 = (2x+1)(x+1)$
6.	Se realiza el procedimiento algebraico y se encuentran los posibles valores de x.	X= 0 -2
7.	Sustituimos los valores de x en la pendiente que es la derivada de la función	$m = 2x + 1$ $m_1 = 2(0) + 1$= 1 $m_2 = 2(-2) + 1$= -3
8.	Conociendo los valores de la pendiente las sustituimos en la ecuación de la recta.	$y = m(x+1)$ $y_1 = 1(x+1)$ $y_1 = x + 1$ $y_2 = -3(x+1)$ $y_2 = -3x - 3$

9.	Existen 2 posibles rectas.	$y_1 = x + 1$ $y_2 = -3x - 3$

RESPUESTA	$y = x + 1$

Tema 3: (22 puntos)

a. Sea $F(x) = \dfrac{x^2 f(x)}{g(x)}$

Obtenga $F'(2)$ si $f(2) = 1,\ f'(2) = 5,\ g(2) = 2$ y $g'(2) = -3$

b. Obtenga $f'(x)$ si $f(x) = \tan\left(\cos\sqrt{2x+5}\right)$

a. Sea $F(x) = \dfrac{x^2 f(x)}{g(x)}$

Obtenga $F'(2)$ si $f(2) = 1,\ f'(2) = 5,\ g(2) = 2$ y $g'(2) = -3$

a. No.	Explicación	Operatoria
1.	Se realiza la derivada de una fracción teniendo cuidado con la multiplicación del denominador y se aplica la regla de la cadena.	$f'(x) = \dfrac{g(x)[x^2 f'(x) + 2xf(x)] - g'(x)x^2 f(x)}{(g(x))^2}$
2.	Se conocen los valores de f(x), g(x) y g´(x) valuados en x=2, y se sustituyen en la derivada	$f'(x) = \dfrac{g(2)[(2^2)f'(2) + 2(2)f(2)] - g'(2)(2^2)f(2)}{(g(2))^2}$ $f'(x) = \dfrac{(2)[4(5) + 4(1)] - (-3)(4)(1)}{4}$
3.	Se simplifica la expresión realizando los procedimientos aritméticos	

		$f'(x) = \frac{48+12}{4} = 15$

RESPUESTA	$f'(x) = 15$

b. Obtenga $f'(x)$ si $f(x) = \tan\left(\cos\sqrt{2x+5}\right)$

b. No.	Explicación	Operatoria
1.	Se determina una derivada de la $\tan u\, du$ y se determina que se debe realizar aplicando la regla de la cadena.	$f'(x) = \tan\cos(\sqrt{2x+5})$
2.	Se aplica la regla de la cadena	$f'(x) = \frac{1}{1+(\cos\sqrt{2x+5})^2}(-\sin\sqrt{2x+5})\left(\frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}\right)(2)$
3.	Se simplifica la expresión realizando los procedimientos algebraicos.	$f'(x) = -\frac{(2x+5)^{-\frac{1}{2}} * \sin\sqrt{2x+5}}{1+(\cos\sqrt{2x+5})^2}$

RESPUESTA	$f'(x) = -\frac{(2x+5)^{-\frac{1}{2}} * \sin\sqrt{2x+5}}{1+(\cos\sqrt{2x+5})^2}$