UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-2-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**19 de septiembre del 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Pinto**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Kevin Pinto**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Dra. Mayra Castillo**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Segundo examen parcial

Temario A

Tema 1: (25 puntos)

1.1 Usando diferenciación implícita o logarítmica, encuentre y'

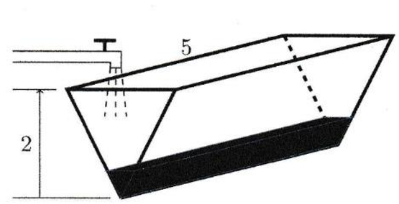
a. $\tan^{-1} y + e^{x} = \ln(xy)$ **b.** $y = (x-1)^{x}$

1.2 Calcule el límite

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{2/x}-1\right)$$

Tema 2: (20 puntos)

La figura muestra la forma y dimensiones en metros, que tiene un depósito de agua, cuyos extremos son triángulos equiláteros. Determine a qué razón debe ingresar agua hacia el tanque para que la altura suba a razón de 0.1 metros por hora, cuando el nivel del agua está a 1 metro de profundidad.



Tema 3: (15 puntos)

Trace la gráfica de una función continua que satisface las condiciones siguientes

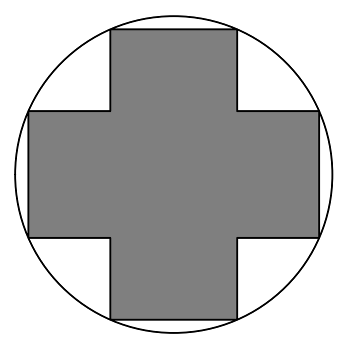
$f'(x) = 2$ si $x < 0$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$ si $x > 1$;

$f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$, $f''(x) < 0$ si $x > 2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Tema 4: (20 puntos)

Una cruz simétrica se inscribe dentro de un círculo de radio 6 cm.

Determine las dimensiones de la cruz de tal forma que su área sea máxima.



Tema 5: (20 puntos)

5.1 Determine el valor de *c* que satisface las condiciones del teorema del valor medio para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$.

5.2 Determine los valores de *b* y *c* de tal forma que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + c$, tenga un punto de inflexión en el punto $(1,8)$.

TEMA 1 (25 Pts)

1.1 Usando diferenciación implícita o logarítmica, encuentre y'

a. $\tan^{-1} y + e^x = \ln(xy)$

SOLUCIÓN:

Explicación	Operatoria
Derivamos la función mediante derivación implícita. Recordando que la notación utilizada es:	$\tan^{-1} y + e^x = \ln(xy)$ $\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx} = y'$
A causa de que necesitamos calcular y', derivaremos la igualdad con respecto a x en ambos lados. Antes de derivar el lado derecho de la igualdad, aplicaremos la siguiente propiedad de los logaritmos. Ln(xy)=Ln(x)+Ln(y)	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} y + e^x) = \frac{d}{dx}(\ln(xy))$ $\frac{1}{1+y^2} * \frac{dy}{dx} + e^x = \frac{d}{dx}(\ln(x) + \ln(y))$ $\frac{1}{1+y^2} * \frac{dy}{dx} + e^x = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} * \frac{dy}{dx}$ $\frac{1}{1+y^2} * y' + e^x = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} * y'$
Procedemos a despejar y'. Finalmente simplificamos un poco	$\frac{1}{1+y^2} * y' - \frac{1}{y} * y' = \frac{1}{x} - e^x$ $y' * \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x} - e^x$ $y' = \frac{\frac{1}{x} - e^x}{\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{y}} = \frac{(1-e^x x)(y*(y^2+1))}{x(y-1-y^2)}$

R// $\frac{(1-e^x x)(y*(y^2+1))}{x(y-1-y^2)}$

1.1 Usando diferenciación implícita o logarítmica, encuentre y'

b. $y = (x-1)^x$

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Derivamos la función mediante derivación logarítmica. Utilizando las propiedades necesarias: $Ln(a^b)=b*Ln(a)$	$y = (x-1)^x$
Primero aplicaremos logaritmo natural de ambos lados de la igualdad.	$Ln(y) = Ln(x-1)^x$ $Ln(y) = x * Ln(x-1)$
A causa de que necesitamos calcular y', derivaremos la igualdad con respecto a x en ambos lados. Nota derivamos el lado derecho de la igualdad, aplicaremos la propiedad de la multiplicación.	$\frac{d}{dx}\big(Ln(y)\big) = \frac{d}{dx}(x * Ln(x-1))$ $\frac{1}{y} * \frac{dy}{dx} = Ln(x-1) * \frac{d}{dx}(x) + x * \frac{d}{dx}\big(Ln(x-1)\big)$ $\frac{1}{y} * \frac{dy}{dx} = Ln(x-1) * 1 + x * \frac{1}{x-1}$
Seguidamente simplificamos la expresión, para despejar y'.	$\frac{1}{y} * \frac{dy}{dx} = Ln(x-1) * 1 + x * \frac{1}{x-1}$ $\frac{dy}{dx} = \left(Ln(x-1) + \frac{x}{x-1}\right) * y$

R// $\frac{dy}{dx} = \left(Ln(x-1) + \frac{x}{x-1}\right) * Ln(x-1)^x$

1.2 Calcule el límite

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{2/x} - 1\right)$$

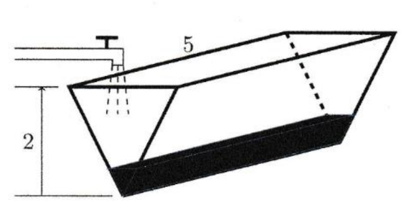
SOLUCIÓN:

Explicación	Operatoria
Reescribimos el límite de tal forma que obtengamos la forma indeterminada 0/0.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$
Teniendo la forma indeterminada, realizaremos el procedimiento de l'hopital, derivando arriba y abajo.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2/x} * (-\frac{2}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}$
Realizamos la simplificación del límite.	$\lim_{x \to +\infty} 2 * e^{2/x}$
Finalmente evaluamos la expresión simplificada.	$\lim_{x \to +\infty} 2 * e^{\frac{2}{x}} = 2 * e^{\frac{2}{\infty}} = 2 * e^0 = 2 * 1 = 2$

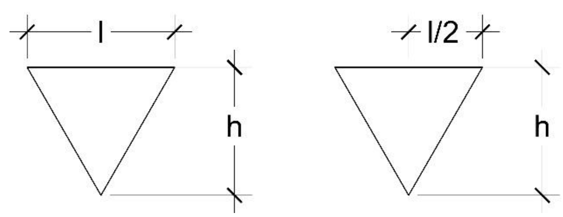
R// $El\ límite\ de\ f(x)\ cuando\ x\ tiende\ al\ infinito\ es\ 2$

TEMA 2 (20 Pts)

La figura muestra la forma y dimensiones en metros, que tiene un depósito de agua, cuyos extremos son triángulos equiláteros. Determine a qué razón debe ingresar agua hacia el tanque para que la altura suba a razón de 0.1 metros por hora, cuando el nivel del agua está a 1 metro de profundidad.



SOLUCIÓN:

Explicación	Operatoria
Plantearemos el volumen del tanque, en términos de las siguientes variables: • h = altura del triángulo • x = semi-base del triángulo • l = lado del triángulo • p = profundidad Debido a que nos indican que el triángulo es equilatero, sabemos que: $$A_t = \frac{\sqrt{3}}{4} * l^2$$	$$V = A_t * P$$ $$A_t = \frac{\sqrt{3}}{4} * l^2$$ $$V = \frac{\sqrt{3}}{4} * l^2 * P$$
La profundidad es un dato del problema y es numéricamente igual a 5 metros. Sin embargo, es necesario calcular el área en función de la altura. Para determinar la relación entre el lado y la altura se realizó una relación pitagórica con la mitad del triángulo.	 $$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$$ $$h = \frac{\sqrt{3}}{2} * l$$ $$\frac{2h}{\sqrt{3}} = l$$
Con la relación anterior, procedemos a colocar el volumen del tanque en términos de la altura.	$$V(h) = \frac{\sqrt{3}}{4} * \left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 * P = \frac{h^2}{\sqrt{3}} * P$$

Colocaremos el valor de la profundidad, para tener el volumen únicamente en términos de la altura.	$V(h) = \frac{h^2}{\sqrt{3}} * 5$
El problema nos pide la razón de cambio del agua que debe ingresar, para que la altura suba 0.1 metros por hora, cuando el agua esta a un metro de altura. Matemáticamente nos indica que:	$\frac{dV}{dt} = ?$ *Cuando* $\frac{dh}{dt} = 0.1\ m/h \quad \& \quad V = V(1)$
Ahora procedemos a derivar el volumen con respecto al tiempo.	$V(h) = \frac{h^2}{\sqrt{3}} * 5$ $\frac{dV}{dt} = \frac{5}{\sqrt{3}} * 2 * h * \frac{dh}{dt}$
Finalmente evaluamos con los datos planteamos en el problema.	$\frac{dV}{dt} = \frac{5}{\sqrt{3}} * 2 * 1 * 0.1$ $\frac{dV}{dt} = 0.577350\ m^3/s$

R// Debe entrar un caudal igual a 0.577350 m^3/s

TEMA 3 (15 Pts)

Trace la gráfica de una función continua que satisface las condiciones siguientes

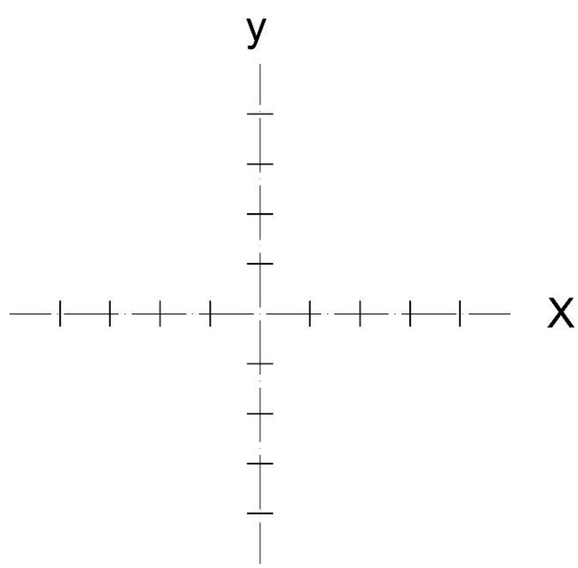
$f'(x) = 2$ si $x < 0$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$ si $x > 1$;

$f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$, $f''(x) < 0$ si $x > 2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

SOLUCIÓN:

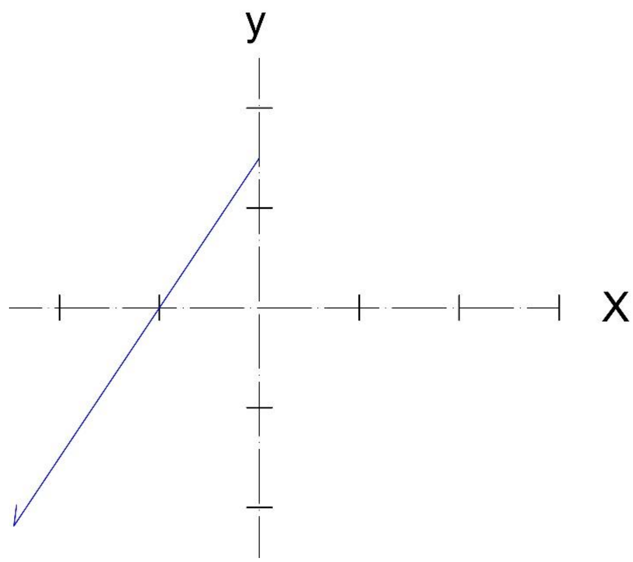
Explicación	Operatoria

Realizamos la gráfica paso a paso de acuerdo a las indicaciones solicitadas, empezando con un plano en blanco:



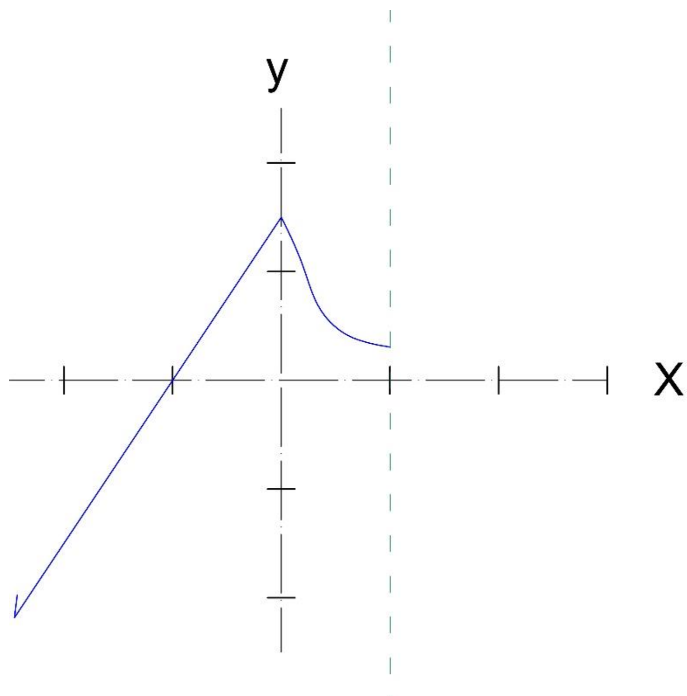
Debido a que la derivada es positiva y constante esto indica que la función es una recta creciente desde menos infinito hasta cero, al no dar puntos el problema, la grafica puede pasar por cualquier parte del plano

$$f'(x) = 2 \ \ si \ \ x < 0$$



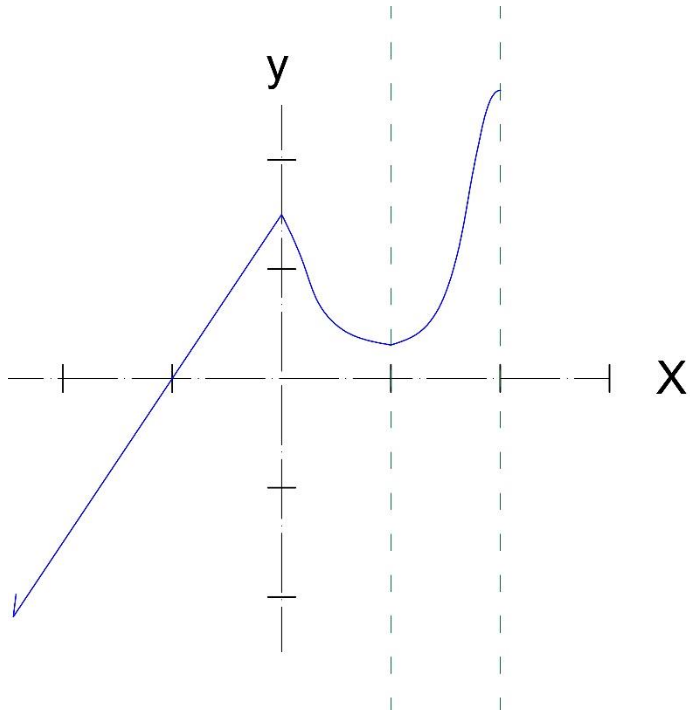
Una derivada menor que cero nos indica que las pendientes de la recta tangente son negativas en ese intervalo y como la segunda derivada es positiva quiere decir que la curvatura es hacia arriba.

$$f'(x) < 0 \ \ si \ \ 0 < x < 1 \quad \& \quad f''(x) > 0 \ \ si \ \ 0 < x < 2$$



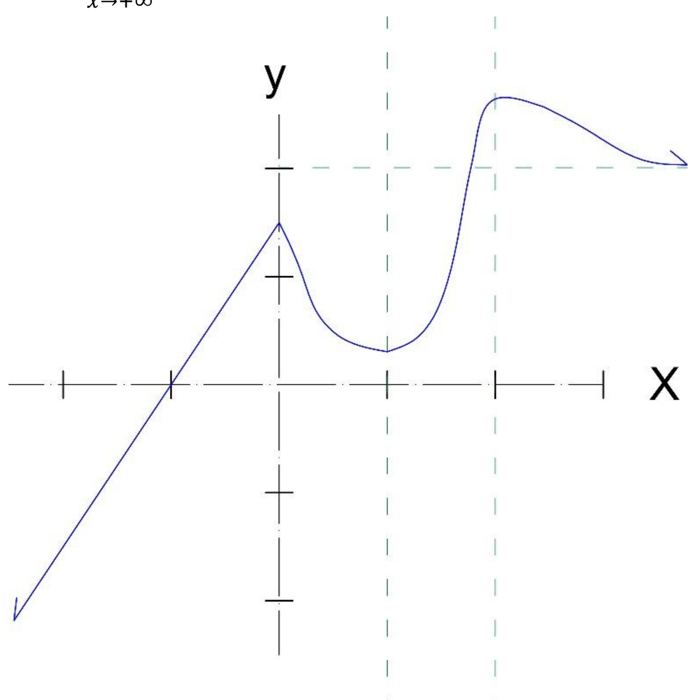
De igual manera, una derivada mayor que cero nos indica que las pendientes de la recta tangente son positivas en ese intervalo y como la segunda derivada es positiva quiere decir que la curvatura es hacia arriba.

$$f'(x) > 0 \;\; si \;\; x > 1 \quad \& \quad f''(x) > 0 \;\; si \;\; 0 < x < 2$$



Finalmente nos indica que cuando x tiene al infinito, la función tiende a dos. Además, la segunda derivada es negativa; por lo tanto, la curvatura es hacia abajo.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \& \quad f''(x) < 0 \;\; si \;\; x > 2$$

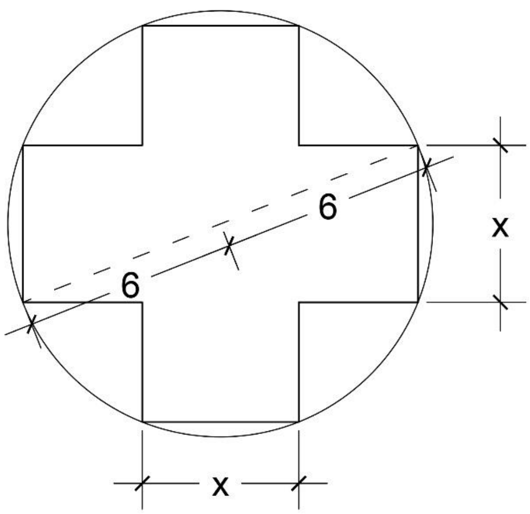


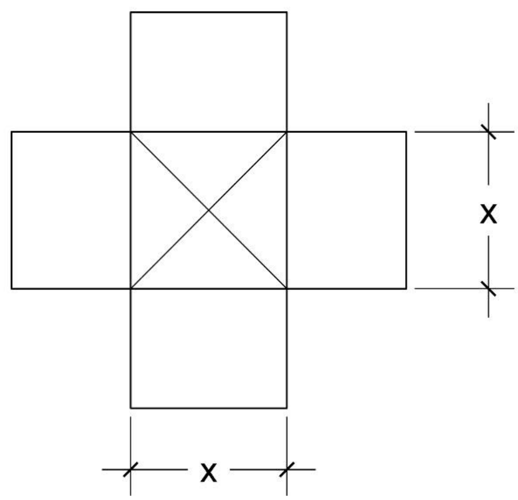
TEMA 4 (20 Pts)

Una cruz simétrica se inscribe dentro de un círculo de radio 6 cm.
Determine las dimensiones de la cruz de tal forma que su área sea máxima.

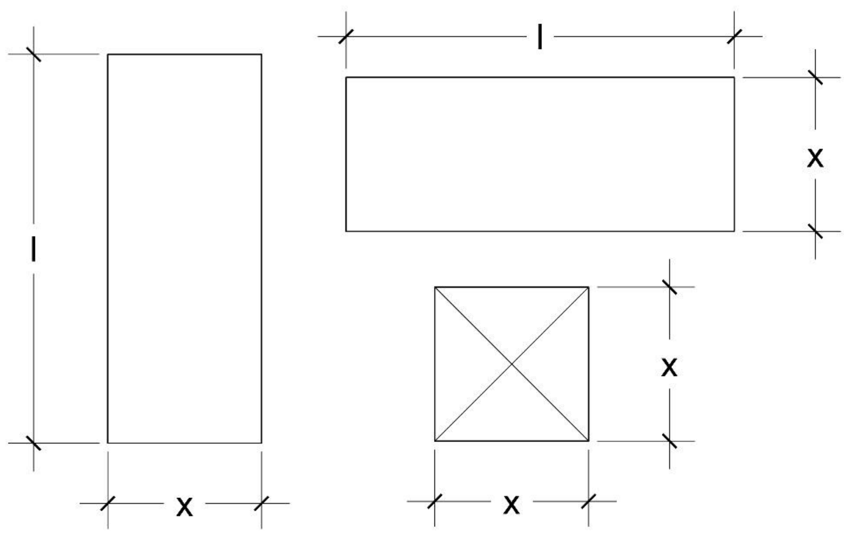
SOLUCIÓN:

<table>
<tr><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td colspan="2">
Primero realizaremos un bosquejo del problema en el cual nos servirá para determinar el área de la cruz. A razón de que, es una cruz simétrica cada lado que forma una secante con el circulo, miden lo mismo “x”.





</td></tr>
<tr><td colspan="2">
A continuación, dividiremos el área de la cruz en dos rectángulos y el cuadrado de intersección entre ellos.



</td></tr>
</table>

Ahora debemos plantear el área de los rectángulos y el cuadrado. Sin embargo, no conocemos un lado de los rectángulos, pero podemos calcularlos al realizar una relación pitagórica con el diámetro del circulo y uno de sus lados	$l^2 + x^2 = (6+6)^2$ $l^2 + x^2 = (12)^2$ $l = \sqrt{144 - x^2}$
Procedemos a calcular el área de la cruz, recordando que es la suma de los dos rectángulos menos el área del cuadrado.	$A(x) = 2 * x * \sqrt{144 - x^2} - x^2$

Para maximizar el área debemos derivar e igual a cero. Por lo tanto, procedemos a realizar el trabajo algebraico.

$$A(x) = 2 * x * \sqrt{144 - x^2} - x^2$$

$$A'(x) = 2\sqrt{144 - x^2} + \frac{2x * (-2x)}{2 * \sqrt{144 - x^2}} - 2x$$

$$A'(x) = 2\sqrt{144 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{144 - x^2}} - 2x$$

$$\left(2\sqrt{144 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{144 - x^2}} - 2x = 0\right) * \sqrt{144 - x^2}$$

$$2(144 - x^2) - 2x^2 - 2x * \sqrt{144 - x^2} = 0$$

$$2(144 - x^2) - 2x^2 = 2x * \sqrt{144 - x^2}$$

$$(288 - 4x^2 = 2x * \sqrt{144 - x^2})/2$$

$$(144 - 2x^2)^2 = \left(x * \sqrt{144 - x^2}\right)^2$$

$$4x^4 - 576x^2 + 20736 = x^2(144 - x^2)$$

$$4x^4 - 576x^2 + 20736 = 144x^2 - x^4$$

$$5x^4 - 720x^2 + 20736 = 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Para simplificar la solución de la ecuación planteada antes se utilizará la formula cuadrática, modificando que el valor de x es x cuadrado:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x^2 = \frac{-(-720) \pm \sqrt{(-720)^2 - 4(5)(20736)}}{2(5)}$$

$$x^2 = 72 \pm \frac{144}{10}\sqrt{5}$$

Recordemos que al operar una raíz cuadrada debe existir una parte positiva y una negativa.

$$x = \pm\sqrt{72 \pm \frac{144}{10}\sqrt{5}}$$

Por lo tanto, las cuatro posibles soluciones son:

$$x_1 = +\sqrt{72 + \frac{144}{10}\sqrt{5}} \approx 10.2078$$
$$x_2 = +\sqrt{72 - \frac{144}{10}\sqrt{5}} \approx 6.3088$$
$$x_3 = -\sqrt{72 + \frac{144}{10}\sqrt{5}} \approx -10.2078$$
$$x_4 = -\sqrt{72 - \frac{144}{10}\sqrt{5}} \approx -6.3088$$

Las últimas dos respuestas son descartadas por ser negativas, ahora bien, si el estudiante coloca las dos respuestas positivas como soluciones, seria valido bajo el criterio de evaluación. Sin embargo, al elevar al cuadrado la ecuación para poder resolverla se incluyeron dos soluciones que en realidad no son ciertas para la ecuación original. Por lo tanto, la respuesta correcta para solucionar el problema es x=6.3088.

$$R//\ Respuestas\ validas \quad x \approx 10.2078;\ \approx 6.3088$$
$$Respuesta\ correcta \quad x \approx 6.3088$$

TEMA 5 (20 Pts)

5.1 Determine el valor de *c* que satisface las condiciones del teorema del valor medio para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$.

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Primero recordaremos el teorema del valor medio.	$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$
Por lo tanto, primero debemos integrar la función f(x), en el intervalo que nos indican.	$\int_0^a x^2 dx = x^3 \Big\vert_0^a$ $a^3 - 0 = a^3$
Ahora procedemos evaluar f(c) y colocar los valores en el teorema del valor medio.	$f(c) = c^2$ $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ $c^2(a-0) = a^3$ $c^2 = \frac{a^3}{a}$ $c^2 = a^2$ $c = a$

$R//$ El valor de c que satisface las condiciones de valor medio es a.

5.2 Determine los valores de *b* y *c* de tal forma que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + c$, tenga un punto de inflexión en el punto $(1,8)$.

SOLUCIÓN:

Explicación	**Operatoria**
Pata tener un punto de inflexión, la segunda derivada debe ser igual a cero. Por lo tanto, derivaremos dos veces la función.	$f(x) = x^3 + b\,x^2 + c$ $f'(x) = 3\,x^2 + 2b\,x + 0$ $f''(x) = 6x + 2b$
Como siguiente paso, debemos evaluar para que exista un punto de inflexión en (1,8)	$f''(1) = 0$ $0 = 6(1) + 2b$ $b = -3$
Con el valor de b, procedemos a evaluar en la función original para determinar el valor de C.	$f(1) = 8$ $8 = 1^3 - 3 * 1^2 + c$ $c = 10$

$R//$ Los valores deben ser $b = -3$ & $c = 10$.