UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-103-2-V-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	Segundo
CÓDIGO DEL CURSO:	103
TIPO DE EXAMEN:	Segundo Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	19 de septiembre del 2017
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

Segundo examen parcial

Temario V

Tema 1: (20 puntos)

a. Utilice derivación implícita para calcular y'

$$x^2 + y^2 = \cos(xy)$$

b. Calcule la derivada por derivación logarítmica

$$f(x) = \frac{\left(x^3 - 1\right)^5 \left(x^4 + 3x^3\right)^4}{(7x + 5)^9}$$

Tema 2: (15 puntos)

Utilizando la regla de L'Hospital, calcule el límite

$$\lim_{x \to 0} \left(x^{\tan x}\right)$$

Tema 3: (20 puntos)

Para la siguiente función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

a. Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

b. Encuentre los extremos relativos de la función.

c. Encuentre los intervalos donde hay concavidad hacia arriba o concavidad hacia abajo.

d. Encuentre los puntos de inflexión.

e. Dibuje la gráfica de la función.

Tema 4: (20 puntos)

Una escalera de 20 metros de longitud se encuentra recostada sobre un muro que tiene una inclinación de 60°. El extremo inferior de la escalera empieza a deslizar a una razón de 20 centímetros por minuto, determine:

a. Las variables del problema.

b. Las posibles relaciones entre las variables, según la geometría del problema.

c. El ritmo al cual desciende la parte superior de la escalera por el muro, cuando la distancia de la parte inferior de la escalera al muro es de 2 metros.

Tema 5: (25 puntos)

Un semicírculo se encuentra inscrito en un triángulo rectángulo delimitado por los semiejes de coordenadas y por la recta que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(0,4)$. El centro del semicírculo se encuentra sobre la recta. Encontrar las dimensiones del semicírculo que tiene el área máxima.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (20 puntos)

a. Utilice derivación implícita para calcular y'

$$x^2 + y^2 = \cos(xy)$$

b. Calcule la derivada por derivación logarítmica

$$f(x) = \frac{\left(x^3-1\right)^5\left(x^4+3x^3\right)^4}{(7x+5)^9}$$

a. Utilice derivación implícita para calcular y'

$$x^2 + y^2 = \cos(xy)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe de derivar la función utilizando la metodología de derivación implícita, para ello es necesario derivar termino por término de la expresión.	$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}\cos(xy)$
2.	Se simplifica la expresión, aplicando la regla de la cadena para el $\cos(u)du$	$2x + 2y\frac{dy}{dx} = -\sin(xy)\left[\frac{d}{dx}(xy)\right]$

3.	Se simplifica la expresión, aplicando la regla del producto	$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = -\sin(xy)\left[\dfrac{d}{dx}x + y\right]$
4.	Se simplifica la expresión, buscando despejar $\frac{dy}{dx}$	$2y\dfrac{dy}{dx} + x\dfrac{dy}{dx}\sin(xy) = -\sin(xy) * y - 2x$ $\dfrac{dy}{dx}[2y + x\sin(xy)] = -(y\sin(xy) + 2x)$
5.	Se sabe que $\frac{dy}{dx} = y'$	$\dfrac{dy}{dx} = y' = -\dfrac{y\sin(xy) + 2x}{2y + x\sin(xy)}$

RESPUESTA	$y' = -\dfrac{y\sin(xy) + 2x}{2y + x\sin(xy)}$

b. Calcule la derivada por derivación logarítmica

$$f(x) = \frac{\left(x^3 - 1\right)^5\left(x^4 + 3x^3\right)^4}{(7x + 5)^9}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe de derivar la función utilizando la metodología de derivación logarítmica.	$\ln f(x) = \ln\left[\dfrac{(x^3 - 1)^5(x^4 + 3x^3)^4}{(7x + 5)^9}\right]$
2.	Se simplifica la expresión, aplicando las reglas de los logaritmos.	$\ln f(x) = \ln((x^3 - 1)^5(x^4 + 3x^3)^4) - \ln(7x + 5)^9$ $\ln f(x) = 5\ln(x^3 - 1) + 4\ln(x^4 + 3x^3) - 9\ln(7x + 5)$ $\ln f(x) = 5\ln(x^3 - 1) + 4\ln(x^3(x + 3)) - 9\ln(7x + 5)$ $\ln f(x) = 5\ln(x^3 - 1) + 4\ln(x^3) + 4\ln(x + 3)$ $- 9\ln(7x + 5)$ $\dfrac{dy}{dx}\big[\ln f(x) = 5\ln(x^3 - 1) + 12\ln(x\quad) + 4\ln(x + 3)$ $- 9\ln(7x + 5)\big]$ $\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{5}{x^3-1}(3x^2) + \frac{12}{x} + \frac{4}{x+3} - \frac{9}{7x+5}(7)$
3.	Se despeja para f´(x)	$f'(x) = \left[\dfrac{5}{x^3 - 1}(3x^2) + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x + 3} - \dfrac{9}{7x + 5}(7)\right]f(x)$ Se sabe que:

		$f(x) = \frac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9}$ $f'(x) = \left[\frac{15x^2}{x^3-1} + \frac{12}{x} + \frac{4}{x+3} - \frac{63}{7x+5}\right]\left[\frac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9}\right]$

RESPUESTA	$f'(x) = \left[\frac{15x^2}{x^3-1} + \frac{12}{x} + \frac{4}{x+3} - \frac{63}{7x+5}\right] * \left[\frac{(x^3-1)^5(x^4+3x^3)^4}{(7x+5)^9}\right]$

Tema 2: (15 puntos)

Utilizando la regla de L'Hospital, calcule el límite

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{\tan x}\right)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se establece la siguiente situación.	$y = x^{\tan x}$ $\ln y = \ln x^{\tan x}$ $\ln y = \tan x * \ln x$ $\ln y = \frac{\tan x}{\ln x^{-1}}$ $\ln y = -\frac{\tan x}{\ln x}$
2.	Se calcula el siguiente límite.	$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\tan x}{\ln x}\right)$
3.	Se aplica L'Hospital	$\lim_{x\to\infty} -\frac{\tan x}{\ln x}$ $\lim_{x\to\infty} -\frac{\sec^2(x)}{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x\to\infty} -\frac{\sec^2(0)}{\frac{1}{0}} = -\frac{1}{\infty}$=0

		Por lo tanto: $$\lim_{x\to\infty} \ln y = 0$$ $$\ln y = 0$$ $$y = 1$$

RESPUESTA	$$\lim_{x\to\infty} x^{\tan x} = 1$$

Tema 3: (20 puntos)

Para la siguiente función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

a. Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

b. Encuentre los extremos relativos de la función.

c. Encuentre los intervalos donde hay concavidad hacia arriba o concavidad hacia abajo.

d. Encuentre los puntos de inflexión.

e. Dibuje la gráfica de la función.

a. Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para ello se necesita la derivada de la función.	$f'(x) = -15x^4 + 15x^2$
2.	Para saber los intervalos se debe de encontrar los posibles valores de x f´(x) que son los puntos críticos.	$f'(x) = -15x^4 + 15x^2$ $f'(x) = 15x^2(1 - x^2)$ $0 = 15x^2(1 - x^2)$ $0 = 15x^2$ $x_1 = 0$ Pto. Critico $0 = (1 - x^2)$ $x_2 = \pm 1$ Pto. Critico
3.	Se establecen los intervalos, se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se valúa dicho	<table><tr><td>intervalos</td><td>$(-\infty, -1)$</td><td>(-1,0)</td><td>(0,1)</td><td>(1,∞)</td></tr><tr><td>Valor de prueba</td><td>-1.5</td><td>-0.5</td><td>0.5</td><td>2</td></tr><tr><td>Signo en f´(x)</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>

	valor en f´(x) para poder conocer su signo.	
4.	Se sabe la siguiente condición: f´(x)>0 creciente f´(x)<0 decreciente	f´(x)<0: signo – $(-\infty,-1)$, (1,∞) f´(x)>0: signo + (-1,0), (0,1)

RESPUESTA	Creciente: (-1,0), (0,1) Decreciente: $(-\infty,-1)$, (1,∞)

b. Encuentre los extremos relativos de la función

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para conocer los extremos relativos se deben de valuar los puntos críticos en f(x)	Puntos críticos: $x_1 = 0$ $x_2 = \pm 1$ $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ $f(0) = -3(0)^5 + 5(0)^3 = 0$ $f(-1) = -3(-1)^5 + 5(-1)^3 = -2\ minimo\ relativo$ $f(1) = -3(1)^5 + 5(1)^3 = 2\ maximo\ relativo$

RESPUESTA	$f(1) = 2\ maximo\ relativo$ $f(-1) = -2\ minimo\ relativo$

c. Encuentre los intervalos donde hay concavidad hacia arriba o concavidad hacia abajo.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para conocer las concavidades es necesario conocer f´´(x)	$f'(x) = -15x^4 + 15x^2$ $f''(x) = -60x^3 + 30x$ $f''(x) = 30x(1 + 2x^2)$
2.	Para saber los intervalos se debe de encontrar los	$f''(x) = 30x(1 + 2x^2)$ $0 = 30x$ $x_1 = 0$ $0 = 1 + 2x^2$

<table>
<tr><td></td><td>posibles valores de x en f´´(x).</td><td>$x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ =0.7</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Se establecen los intervalos, se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se valúa dicho valor en f´´(x) para poder conocer su signo.</td><td>
<table>
<tr><td>intervalos</td><td>$(-\infty, -0.7)$</td><td>(-0.7,0)</td><td>(0,0.7)</td><td>(0.7,∞)</td></tr>
<tr><td>Valor de prueba</td><td>-1.5</td><td>-0.5</td><td>0.5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Signo en f´(x)</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Se sabe la siguiente condición:
f´´(x)>0 concavidad arriba
f´´(x)<0 concavidad abajo</td><td>f´´(x)>0: signo +
$(-\infty, -0.7)$, (0,0.7)
f´´(x)<0: signo -
(-0.7,0), (0.7,∞)</td></tr>
</table>

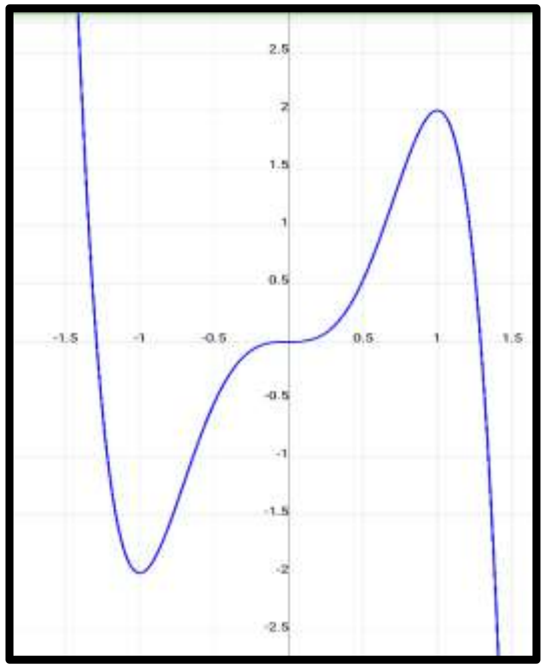
RESPUESTA	Concavidad hacia arriba: $(-\infty, -0.7)\ y$ (0,0.7) Concavidad hacia abajo: (-0.7,0) y (0.7,∞)

d. Encuentre los puntos de inflexión.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para conocer los puntos de inflexión, solo se necesita saber que es donde f´´(x) cambia de signo	$x = -0.7 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ $x = 0$ $x = 0.7 = \sqrt{\frac{1}{2}}$

RESPUESTA	$puntos\ de\ inflexion$: $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$

e. Dibuje la gráfica de la función.

RESPUESTA	

Tema 4: (20 puntos)

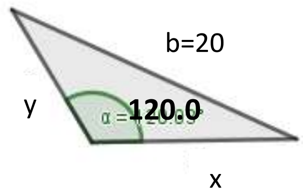
Una escalera de 20 metros de longitud se encuentra recostada sobre un muro que tiene una inclinación de 60°. El extremo inferior de la escalera empieza a deslizar a una razón de 20 centímetros por minuto, determine:

a. Las variables del problema.

b. Las posibles relaciones entre las variables, según la geometría del problema.

c. El ritmo al cual desciende la parte superior de la escalera por el muro, cuando la distancia de la parte inferior de la escalera al muro es de 2 metros.

a. Las variables del problema.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se establece los datos que nos da el problema	 $$\frac{dx}{dt} = 0.20\frac{m}{min}$$

RESPUESTA	Variables: Distancia inferior= x Distancia superior= y

b. Las posibles relaciones entre las variables, según la geometría del problema.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se sabe que no es un triángulo rectángulo, por ende, nos podemos basar en las leyes de senos y cosenos para relacionar las variables	$20^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120$ $400 = x^2 + y^2 - 2xy(-\frac{1}{2})$ $400 = x^2 + y^2 + xy$

RESPUESTA	Relación de Variables: $400 = x^2 + y^2 + xy$

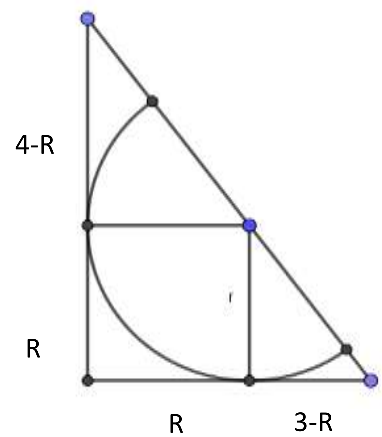
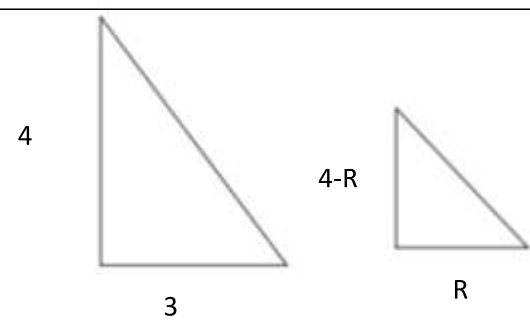
c. El ritmo al cual desciende la parte superior de la escalera por el muro, cuando la distancia de la parte inferior de la escalera al muro es de 2 metros.

1.	Se sabe la relación entre las variables, para saber el ritmo de cambio se debe de encontrar la razón de cambio. Y se despeja para $\frac{dy}{dt}$	$\frac{d}{dt}[400 = x^2 + y^2 + xy]$ $\frac{d}{dt}400 = \frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 + \frac{d}{dt}xy$ $0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + \left[x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right]$ $-2y\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ $-(2y + x)\frac{dy}{dt} = (2x + y)\frac{dx}{dt}$ $\frac{dy}{dt} = -\frac{(2x + y)\frac{dx}{dt}}{(2y + x)}$
	Se sabe lo siguiente, x=2 y $\frac{dx}{dt} = 0.20\frac{m}{min}$	Cuando x= 2, ¿Y? $400 = 2^2 + y^2 + 2y$ $396 = y^2 + 2y$ $y_1 = -20.9249 \ se \ descarta \ dicho \ valor$ $y_2 = 18.9249$
	Al saber la razón de cambio de x respecto de t, el valor de x, el valor y, solo se sustituye en $\frac{dy}{dt}$	$\frac{dy}{dt} = -\frac{(2(2) + (18.9249)(0.20))}{(2(18.9249) + 2)} = -0.115057\frac{m}{min}$

RESPUESTA	La parte superior de la escalera desciende a una razón de 11.51$\frac{cm}{min}$

Tema 5: (25 puntos)

Un semicírculo se encuentra inscrito en un triángulo rectángulo delimitado por los semiejes de coordenadas y por la recta que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(0,4)$. El centro del semicírculo se encuentra sobre la recta. Encontrar las dimensiones del semicírculo que tiene el área máxima.

1.	Se interpreta el enunciado, realizando la figura dada	
2.	Se establece la ecuación a maximizar.	$A = \frac{\pi R^2}{2}$
3.	Se establecen las figuras que nos determinarán la restricción.	

4.	Se determina la Restricción.	$$\frac{4-R}{R}=\frac{4}{3}$$ $$4-R=\frac{4R}{3}$$ $$12=7R$$ $$R=\frac{12}{7}$$
5.	Al tener una solución directa, se determina que éste no es un problema que posea máximos y mínimos. Por lo tanto, hay una única solución.	$$A=\frac{\pi\left(\frac{12}{7}\right)^2}{2}=4.62\ u^2$$

RESPUESTA	Una sola posibilidad, Área=$4.62\ u^2$