CLAVE-112-1-M-1-00-2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	**MATEMÁTICA INTERMEDIA 2**
TIPO DE EXAMEN:	**PRIMER PARCIAL**
SEMESTRE:	**PRIMER SEMESTRE**
FECHA:	**ABRIL DE 2015**
NOMBRE DEL AUXILIAR QUE RESOLVIO EL EXAMEN:	**KEVIN JAVIER CHIN ORTIZ**
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISO LA CLAVE:	**ING. RENALDO GIRON**

CLAVE-112-1-M-1-00-2015

TEMA 1 (30 pts, 10 pts c/u): Calcule lo que se le pide a continuación:

a) Graficar $r(t) = \langle\ 4\cos(t)\ ,\ \ 2t\ \ ,\ 4\sin(t)\rangle$ en el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$.
b) Para la función vectorial a calcularcurvatura en el punto $P(1\ ,0\ ,0)$
c) Calcular$\lim\limits_{t\to\infty} \langle (e^{-t})^{\frac{1}{2}}\ \ ,\ \ \frac{4t-3}{2-t^2}\ \ ,\ \tan^{-1}(t)\rangle$

TEMA 2 (10pts):Calcule lo que se le pide a continuación:

Encuentre el dominio de la función$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{3x^2-2y^2}{\sqrt{2x^2-3y}}}$

TEMA 3 (20 pts):

Para $\boldsymbol{L(r,h) = 0.00021\left(\ln\left(\frac{2h}{r}\right) - 0.75\right)}$, se sabe que La inductancia " $\boldsymbol{L}$ " (medida en microhenrys), " $\boldsymbol{h}$ " es la longitud del hilo (en milímetros) y " $\boldsymbol{r}$ " es el radio de una sección transversal circular(en mili metros), son la medida de un hilo recto no magnético en el vacío. Use diferenciales para calcular el radio de la sección transversal circular si se sabe que al inicio hay $\mathbf{6.4 * 10^{-6}\ microhenrys}$con un error de medición de$\mathbf{{}^{1}/_{10000}\ de\ microhenrys}$ y $\mathbf{100\ milimetros}$ de longitud de hilo con un error de medición de $\mathbf{{}^{1}/_{100}\ de\ milimetro}$

TEMA 4 (20 pts):

La Temperatura en un punto $(\mathbf{x}\ ,\mathbf{y})$ en una plancha de metal plana, este definida por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{50}/(\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)$ donde "$\boldsymbol{T}$"se mide en ℃ & $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ **en metros**. Calcule la razón de cambio de la Temperatura en el punto $(\mathbf{2}\ ,\mathbf{1})$:

a) La dirección de " $\boldsymbol{x}$ "

b) La dirección de " $\boldsymbol{y}$ "

TEMA 5 (20 pts: 10 pts c/u):

Para función$\boldsymbol{f(r,s) = \mathbf{r}\ln(r^2 + s^2)}$calcule las primeras derivas:

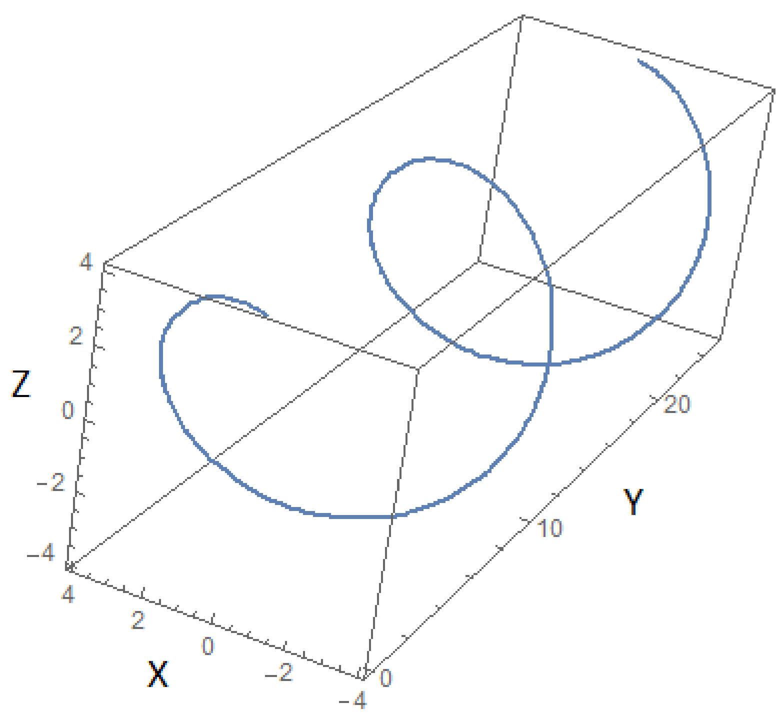
a)$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial r}}$ b)$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial s}}$

TEMA 1

a) Debido a que tenemos una función que consta de seno y coseno, la curva que describe nuestra función es una elise creciente en el eje donde se encuentra "t", en este caso en el eje "y"

Podemos evaluar algunos puntos específicos para determinar por donde pasa la curva, en el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$:

t	$4\,Cos\,(t)$	$2t$	$4\,Sen(t)$
0	$4\hat{\imath}$	$0\hat{\jmath}$	$0\hat{k}$
$\pi/2$	$0\hat{\imath}$	$\pi\hat{\jmath}$	$4\hat{k}$
π	$-4\hat{\imath}$	$2\pi\hat{\jmath}$	$0\hat{k}$
$3\pi/2$	$0\hat{\imath}$	$3\pi\hat{\jmath}$	$-4\hat{k}$
2π	$4\hat{\imath}$	$4\pi\hat{\jmath}$	$0\hat{k}$
$5\pi/2$	$0\hat{\imath}$	$5\pi\hat{\jmath}$	$4\hat{k}$
3π	$-4\hat{\imath}$	$6\pi\hat{\jmath}$	$0\hat{k}$
$7\pi/2$	$0\hat{\imath}$	$7\pi\hat{\jmath}$	$-4\hat{k}$
4π	$4\hat{\imath}$	$8\pi\hat{\jmath}$	$0\hat{k}$



b) Sabiendo que la ecuación de curvatura está definida por:

$$K(t) = \frac{|r'(t)\; X\; r''(t)\;|}{|r'(t)|^3}$$

Y evaluando la función $r(t) = \langle\; 1 + t\;, t^2\;,\; t^3\rangle$, en el punto $P(1\;,0\;,0)$, obtenemos:

$1 + t$	t^2	t^3
$1 + t = 1$	$t^2 = 0$	$t^3 = 0$
$t = 0$	$t = 0$	$t = 0$

Por lo tanto en el punto $P(1\;,0\;,0)$, $\qquad t = 0$

Determinando las derivadas y productos necesarios para encontrar la curvatura:

$$r'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2\rangle \quad \to \quad r'(0) = \langle 1, 0, 0\rangle$$

$$r'' = \langle 0, 2, 6t\rangle \quad \to \quad r''(0) = \langle 0, 2, 0\rangle$$

$$r'(t)\; X\; r''(t) = \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Resolviendo el producto cruz:

$$r'(t)\; X\; r''(t) = [(0)(0) - (0)(2)]\hat{\imath} + [(1)(0) - (0)(0)]\hat{\jmath} + [(1)(2) - (0)(0)]\hat{k}$$

$$r'(t)\; X\; r''(t) = \langle 0, 0, 2\rangle$$

$$\left|r'(t)\; X\; r''(t)\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2$$

$$|r'(t)| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

Sustituyendo en la ecuación de curvatura, finalmente encontramos que:

$$K = \frac{|r'(t)\; X\; r''(t)\;|}{|r'(t)|^3} = \frac{2}{(1)^3}$$

Y por lo tanto: $K = 2$

c) Evaluando cada límite por separado cuando $t \to \infty$

Para:

$$\lim_{t\to\infty} (e^{-t})^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}}$$

Hacemos la sustitución:

$$u = \frac{t}{2}$$

Entonces, reescribiendo el límite:

$$\lim_{u\to\infty} e^{-u} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{t\to\infty} (e^{-t})^{\frac{1}{2}} = 0$$

Para:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{4t-3}{2-t^2}$$

Evaluando el límite, obtenemos que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\infty}{-\infty}$$

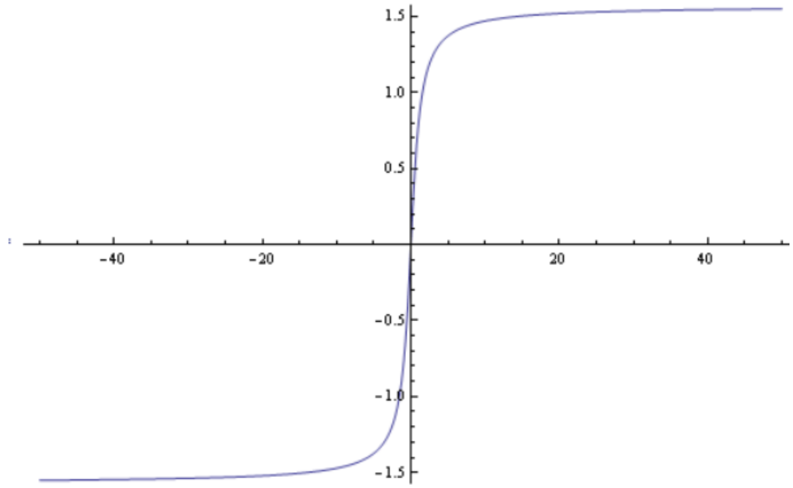
Derivando el numerador y denominador de la fracción:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{4}{-2t} = \frac{4}{-\infty} = 0$$

Para:

$$\lim_{t\to\infty} (\tan^{-1}(t))$$

Debido a la tendencia que se muestra en la gráfica, puede concluirse que:



$$\lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}(t)) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto lo solución general del límite queda expresada como:

$$\lim_{t\to\infty} \left\langle 0, 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

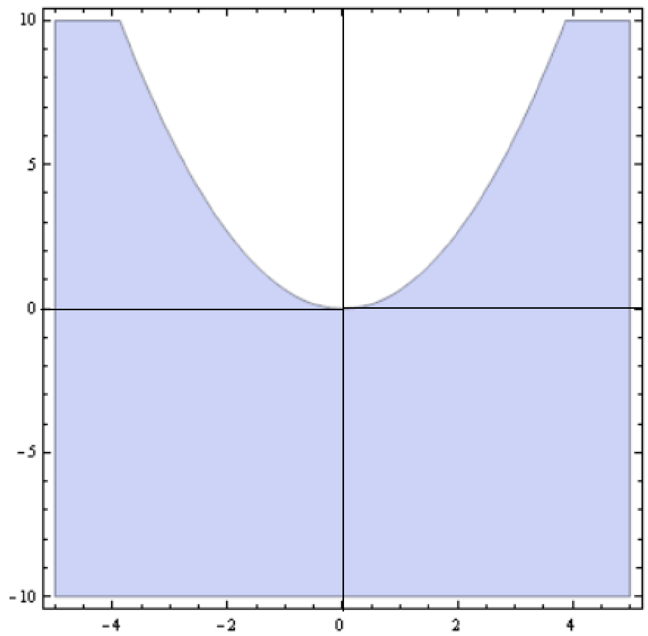
TEMA 2

Sabiendo que la función $f(x,y) = \frac{3x^2-2y^2}{\sqrt{2x^2-3y}}$, no puede ser cero en el denominador, ni puede existir una raíz negativa, entonces:

$$2x^2 - 3y > 0$$
$$2x^2 > 3y$$
$$\frac{2}{3}x^2 > y$$

Por lo tanto el dominio de la función queda definido como:

$$y < \frac{2}{3}x^2$$



TEMA 3

Primero utilizamos la ecuación dada, la de inductancia, para despejar el radio "r"

$$\boldsymbol{L = 0.00021\left(\ln\left(\frac{2h}{r}\right) - 0.75\right)}$$

$$\frac{L}{0.00021} = \ln\left(\frac{2h}{r}\right) - 0.75$$

$$\frac{L}{0.00021} + 0.75 = \ln\left(\frac{2h}{r}\right)$$

Aplicamos exponenciales en ambos lados de la ecuación para eliminar el logaritmo natural:

$$e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)} = \cancel{e}^{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)}$$

$$e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)} = \frac{2h}{r}$$

Finalmente la ecuación del radio de la sección circular queda expresada como:

$$r = \frac{2h}{e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}}$$

Y utilizando diferenciales para calcular dicho radio:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial h}\, dh + \frac{\partial r}{\partial L}\, dL$$

Realizando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial r}{\partial h} = \frac{\cancel{\left(e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}\right)}(2) - \cancel{(2h)(0)}}{\left(e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial L} = \frac{\cancel{\left(e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}\right)(0)} - (2h)\cancel{\left(e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}\right)}\left(\frac{0.00021(1)-0}{(0.00021)^2}\right)}{\left(e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{-(2h)(4761.904)}{e^{\left(\frac{L}{0.00021}+0.75\right)}}$$

Por lo tanto $\frac{\partial r}{\partial l} = -9523.809\, h\left(e^{\left(-\frac{L}{0.00021}-0.75\right)}\right)$

Y de las condiciones iniciales del problema sabemos que:

$$L = 6.4 * 10^{-6}$$

$$h = 100$$

$$dh = \frac{1}{100}$$

$$dL = \frac{1}{10000}$$

Finalmente hacemos las sustituciones para determinar por diferenciales el radio de la sección transversal circular:

$$dr = \frac{2}{e^{\left(\frac{6.4*10^{-6}}{0.00021}+0.75\right)}}\left(\frac{1}{100}\right) - 9523.809\ (100)(e^{\left(-\frac{6.4*10^{-6}}{0.00021}-0.75\right)})(\frac{1}{10000})$$

$$\boldsymbol{dr = -43.627\ milimetros}$$

TEMA 4

$$\boldsymbol{T(x,y) = 50/(1 + x^2 + y^2)}$$

a) La razón de cambio de la temperatura en el punto (2,1) en dirección de "x", es determinada derivando la ecuación de temperatura con respecto a "x"

$$T_x = \frac{(1 + x^2 + y^2)(0) - (50)(2x)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

La razón de cambio en el punto P (2,1), es:

$$T(2{,}1) = \frac{-(50)\big(2(2)\big)}{(1 + 2^2 + 1^2)^2} = \frac{-50}{9} = \boldsymbol{-5.55\ metros}$$

b) La razón de cambio de la temperatura en el punto (2,1) en dirección de "y", es determinada derivando la ecuación de temperatura con respecto a "y"

$$T_y = \frac{(1 + x^2 + y^2)(0) - (50)(2y)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

La razón de cambio en el punto P (2,1), es:

$$T(2{,}1) = \frac{-(50)\big(2(1)\big)}{(1 + 2^2 + 1^2)^2} = \frac{-25}{9} = \boldsymbol{-2.77\ metros}$$

TEMA 5

$$\boldsymbol{f(r,s) = \mathbf{r}\ln(r^2+s^2)}$$

a) $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}} = (1)(\ln(r^2+s^2)) + \frac{(r)(2r)}{(r^2+s^2)} = \ \boldsymbol{\ln(r^2+s^2) + \frac{2r^2}{r^2+s^2}}$

b) $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{s}} = \cancel{(0)(\ln(r^2+s^2))} + \frac{(r)(2s)}{(r^2+s^2)} = \ \boldsymbol{\frac{2\mathrm{rs}}{\mathrm{r}^2+\mathrm{s}^2}}$