UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-122-1-M-1-00-2018

CURSO:	Matemática Aplicada 4
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	122
TIPO DE EXAMEN:	Primer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	19 de febrero de 2018
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Erick Roberto Mendoza Arevalo
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Erick Roberto Mendoza Arevalo
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González

Primer examen parcial

Temario A

Tema 1: (40 puntos)
Use la fórmula más exacta para aproximar la derivada de la función en los siguientes puntos.

x	$f(x)$
1.2	4.721539
1.4	4.114786
1.6	3.370904
1.8	2.634070
2.0	1.983002

Deje constancia de $f'(1.2)$ a mano.

Tema 2: (30 puntos)

Aproxime $\int_2^3 x^3 \cos 2x \; dx$ utilizando (con $n = 8$):

a) La regla compuesta del trapecio.
b) La regla compuesta de Simpson.
c) La regla compuesta del punto medio.

Tema 3: (40 puntos)

Un automóvil se desplaza durante 24 minutos. Su velocidad v (en millas/horas) en intervalos de seis minutos se muestran en la tabla.

t (horas)	0	0.1	0.2	0.3	0.4
v (mi/h)	0	10	60	40	50

Aproxime la distancia total recorrida, usando las fórmulas cerradas de Newton – Cotes que se puedan aplicar, considerando el hecho que si x representa la distancia total recorrida, entonces:

$$\boldsymbol{x = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (30 puntos)

Use la fórmula más exacta para aproximar la derivada de la función en los siguientes puntos.

x	$f(x)$
1.2	4.721539
1.4	4.114786
1.6	3.370904
1.8	2.634070
2.0	1.983002

Deje constancia de $f'(1.2)$ a mano.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinado el tamaño de paso h (con $a = 1.2$, $b = 2.0$ y $N = 5$).	$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{2.0-1.2}{5-1} = 0.2$
2.	Se selecciona la fórmula apropiada para obtener $f'(1.2)$ (Fórmula de cinco puntos hacia adelante).	$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$
3.	Reemplazando $h = 0.2$ en la expresión anterior.	$f'(1.2) = \frac{1}{12(0.2)}[-25f(1.2) + 48f(1.2+0.2) - 36f(1.2+2(0.2)) + 16f(1.2+3(0.2)) - 3f(1.2+4(0.2))]$ $f'(1.2) = \frac{5}{12}[-25f(1.2) + 48f(1.4) - 36f(1.6) + 16f(1.8) - 3f(2.0)]$
4.	Tomando los valores de la tabla y reemplazando los valores de $f(x_i)$ en la expresión.	$f'(1.2) = \frac{5}{12}[-25(4.721539) + 48(4.114786) - 36(3.370904) + 16(2.634070) - 3(1.983002)]$
5.	Simplificando aritméticamente la expresión (redondeando a 6 decimales).	$f'(1.2) = -2.368824$

No.	Explicación	Operatoria
6.	Con los procedimientos descritos en los pasos 2 al 5, y utilizando la **fórmula de tres puntos hacia adelante**, se aproxima $f'(1.4)$, con $x_0 = 1.4$ y $h = 0.2$.	$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$ $f'(1.4) = \frac{1}{2(0.2)}[-3f(1.4) + 4f(1.4 + 0.2) - f(1.4 + 2(0.2))]$ $f'(1.4) = \frac{1}{2(0.2)}[-3f(1.4) + 4f(1.6) - f(1.8)]$ $f'(1.4) = \frac{5}{2}[-3(4.114786) + 4(3.370904) - (2.634070)]$ $f'(1.4) = -3.737030$
7	Con los procedimientos descritos en los pasos 2 al 5, y utilizando la **fórmula de cinco puntos centrada**, se aproxima $f'(1.6)$, con $x_0 = 1.6$ y $h = 0.2$.	$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 3h)]$ $f'(1.6) = \frac{1}{12(0.2)}\left[f\big(1.6 - 2(0.2)\big) - 8f(1.6 - 0.2) + 8f(1.6 + 0.2) - f\big(1.6 + 2(0.2)\big)\right]$ $f'(1.6) = \frac{5}{12}[f(1.2) - 8f(1.4) + 8f(1.8) - f(2.0)]$ $\frac{5}{12}[(4.721539) - 8(4.114786) + 8(2.634070) - (1.983002)]$ $f'(1.6) = \frac{5}{12}[-25(1.983002) + 48(2.634070) - 36(3.370904) + 16(4.114786) - 3(4.721539)]$ $f'(1.6) = -3.794663$
8	Con los procedimientos descritos en los pasos 2 al 5, y utilizando la **fórmula de tres puntos hacia atrás**, se aproxima $f'(1.8)$, con $x_0 = 1.8$ y $h = -0.2$.	$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$ $f'(1.8) = \frac{1}{2(-0.2)}[-3f(1.8) + 4f(1.8 - 0.2) - f(1.8 - 2(0.2))]$ $f'(1.8) = \frac{1}{2(-0.2)}[-3f(1.4) + 4f(1.6) - f(1.6)]$ $f'(1.8) = \frac{5}{2}[-3(2.634070) + 4(3.370904) - (4.114786)]$ $f'(1.8) = -3.666550$
9	Con los procedimientos descritos en los pasos 2 al 5, y utilizando la **fórmula de cinco**	$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)]$

No.	Explicación	Operatoria
	puntos hacia atrás, se aproxima $f'(2.0)$, con $x_0 = 2.0$ y $h = -0.2$.	$f'(2.0) = \frac{1}{12(-0.2)}[-25f(2.0) + 48f(2.0-0.2) - 36f(2.0-2(0.2)) + 16f(2.0-3(0.2)) - 3f(2.0-4(0.2))]$ $f'(2.0) = -\frac{5}{12}[-25f(2.0) + 48f(1.8) - 36f(1.6) + 16f(1.4) - 3f(1.2)]$ $f'(2.0) = -\frac{5}{12}[-25(1.983002) + 48(2.634070) - 36(3.370904) + 16(4.114786) - 3(4.721539)]$ $f'(2.0) = -2.991552$

RESPUESTA	$f'(1.2) = -2.368824$ $f'(1.4) = -3.737030$ $f'(1.6) = -3.794663$ $f'(1.8) = -3.666550$ $f'(2.0) = -2.991552$

Tema 2: (30 puntos)

Aproxime $\int_2^3 x^3 \cos 2x \; dx$ utilizando (con $n = 8$):

a) La regla compuesta del trapecio.

No.	Explicación	Operatoria
1.	La fórmula para determinar la aproximación por medio de la regla compuesta del trapecio.	$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right]$$
2.	Determinando el valor de h, con $a = 2$, $b = 3$, $n = 8$.	$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$
3.	Obteniendo la expresión para x_j.	$x_j = a + jh = 2 + 0.125j$

4.	Expandiendo la fórmula descrita en la expresión del paso 1.	$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{2}\left[f(2) + 2\sum_{j=1}^{8-1} f(x_j)\ + f(b)\right]$ $\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{(1/8)}{2}\left[f(2) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7)\big)\ + f(3)\right]$ $\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{(1/8)}{2}\left[f(2) + 2\big(f(2.125) + f(2.25) + f(2.375) + f(2.5) + f(2.625) + f(2.75) + f(2.875)\big)\ + f(3)\right]$
5.	Tomando $f(x) = x^3 \cos 2x$ se determinan los valores necesarios para la aproximación, (redondeando a 6 decimales).	$f(2.000) = -5.229149$ $f(2.125) = -4.280523$ $f(2.250) = -2.401096$ $f(2.375) = 0.503737$ $f(2.500) = 4.432222$ $f(2.625) = 9.262546$ $f(2.750) = 14.738116$ $f(2.875) = 20.465094$ $f(3.000) = 25.924598$
6.	Introduciendo los valores correspondientes en la fórmula respectiva y simplificando.	$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{(1/8)}{2}[-5.229149 + 2(-4.280523 - 2.401096 + 0.503737 + 4.432222 + 9.262546 + 14.738116 + 20.465094 + 25.924598)\ + 25.924598]$

RESPUESTA	$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong -6.584890$

b) La regla compuesta de Simpson.

No.	Explicación	Operatoria
1.	La fórmula para determinar la aproximación por medio de la regla compuesta del trapecio.	$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$
2.	Expandiendo la fórmula descrita en la expresión del paso 1 (tomando $h = 1/8$ y $n = 8$).	$$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{3}\left[f(2) + 2\sum_{j=1}^{4-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{4} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$ $$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{(1/8)}{3}\left[f(2) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)\big) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)\big) + f(3)\right]$$ $$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{(1/8)}{3}\left[f(2) + 2\big(f(2.25) + f(2.5) + f(2.75)\big) + 4\big(f(2.125) + f(2.375) + f(2.625) + f(2.875)\big) + f(3)\right]$$
3.	Introduciendo los valores correspondientes en la fórmula respectiva (los cuales fueron obtenidos en el inciso a) y simplificando.	$$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong \frac{(1/8)}{3}[(-5.229149) + 2(-2.401096 + 4.432222 + 14.738116) + 4(-4.280523 + 0.503737 + 9.262546 + 20.465094) + (25.924598)]$$

RESPUESTA	$\int_2^3 x^3 \cos 2x \, dx \cong -6.584890$

c) La regla compuesta del punto medio.

No.	Explicación	Operatoria
1.	La fórmula para determinar la aproximación por medio de la regla compuesta del trapecio.	$$\int_a^b f(x)\,dx \cong 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j})$$
2.	Se determina el valor de h, dado que esta regla difiere de la regla del trapecio y de Simpson.	$$h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{3-2}{8+2} = 0.1$$
3.	En base al tamaño de paso, se determina los coeficientes x_j.	$$x_j = a + (j+1)h = 2 + 0.1(j+1)$$
4.	Determinando los valores necesarios para la aproximación.	$f(x_0) = f(2.1) = -4.540305$ $f(x_2) = f(2.3) = -1.364560$ $f(x_4) = f(2.5) = 4.432222$ $f(x_6) = f(2.7) = 12.492660$ $f(x_8) = f(2.9) = 21.596936$
5.	Expandiendo la fórmula descrita en la expresión del paso 1 (tomando $h = 0.1$ y $n = 8$).	$$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong 2(0.1) \sum_{j=0}^{4} f(x_{2j})$$ $$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong 2h[f(x_0) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)]$$ $$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong 2(0.1)[-4.540305 - 1.364560 + 4.432222 + 12.492660 + 21.596936]$$ $$\int_2^3 x^3 \cos 2x\,dx \cong 2(0.1)[32.616950]$$

RESPUESTA	$\int_2^3 x^3 \cos 2x \, dx \cong 6.523390$

Tema 3: (40 puntos)

Un automóvil se desplaza durante 24 minutos. Su velocidad v (en millas/horas) en intervalos de seis minutos se muestran en la tabla.

t **(horas)**	0	0.1	0.2	0.3	0.4
v **(mi/h)**	0	10	60	40	50

Aproxime la distancia total recorrida, usando las fórmulas cerradas de Newton – Cotes que se puedan aplicar, considerando el hecho que si x representa la distancia total recorrida, entonces:

$$\boldsymbol{x = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se convierte el tiempo final expresado en minutos a horas.	$t_f = 24\, min * \frac{1\, h}{60\, min} = 0.4\, h$
2.	Se determina los tamaños de pasos de cada una de las fórmulas cerradas de Newton-Cotes.	$h_1 = \frac{0.4-0}{1} = 0.4$ $h_2 = \frac{0.4-0}{2} = 0.2$ $h_3 = \frac{0.4-0}{3} = 0.1\bar{3}$ $h_4 = \frac{0.4-0}{4} = 0.1$
3.	Con $n = 1$, se aplica la Regla del Trapecio.	$\int_0^{0.4} v(t)\, dt = \frac{h_1}{2}[v(0) + v(0.4)]$ $\int_0^{0.4} v(t)\, dt = \frac{0.4}{2}[0 + 50]$ $\int_0^{0.4} v(t)\, dt = 10\, mi$
4.	Con $n = 2$, se aplica la Regla de Simpson.	$\int_0^{0.4} v(t)\, dt = \frac{h_2}{3}[v(0) + 4\, v(0.2) + v(0.4)]$ $\int_0^{0.4} v(t)\, dt = \frac{0.2}{3}[0 + 4(60) + 50]$

		$$\int_0^{0.4} v(t)\,dt = 19.\overline{3}\,mi$$
5.	Dado que $h_3 = 0.1\overline{3}$, no cumple con los datos de la tabla, continuamos con $n = 4$.	$$\int_0^{0.4} v(t)\,dt = \frac{2\,h_4}{45}[7v(0) + 32\,v(0.1) + 12\,v(0.2) + 32\,v(0.3) + 7\,v(0.4)]$$ $$\int_0^{0.4} v(t)\,dt = \frac{2\,(0.1)}{45}[7(0) + 32(10) + 12(60) + 32(40) + 7(50)]$$ $$\int_0^{0.4} v(t)\,dt = 11.8\overline{6}\,mi$$

RESPUESTA	$n = 1$ $$\int_0^{0.4} v(t)\,dt = 10\,mi$$ $n = 2$ $$\int_0^{0.4} v(t)\,dt = 19.\overline{3}\,mi$$ $n = 4$ $$\int_0^{0.4} v(t)\,dt = 11.8\overline{6}\,mi$$