UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-122-4-M-1-00-2018

CURSO:	Matemática Aplicada 4
SEMESTRE:	Primero
CÓDIGO DEL CURSO:	122
TIPO DE EXAMEN:	Examen Final
FECHA DE EXAMEN:	14 de mayo de 2018
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Erick Roberto Mendoza Arevalo
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Erick Roberto Mendoza Arevalo
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González

Examen Final

Temario A

TEMA 1 (40 PUNTOS)

Aplique el método de Taylor de orden dos para aproximar la solución del siguiente problema de valores iniciales.

$$y' = 2ty + t - 2, \qquad 0 \leq t \leq 1, \qquad y(0) = 1, \qquad use\ h = 0.2$$

TEMA 2 (30 PUNTOS)

Aplique el método de disparo lineal para aproximar la solución del siguiente problema con valores en la frontera.

$$y'' = -y' + x + 2y + 1, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad use\ h = 0.2$$

TEMA 3 (30 PUNTOS)

Use el algoritmo de las diferencias finitas para aproximar la solución al siguiente problema con valores en la frontera.

$$y'' = 3(x - y), \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad use\ h = 0.25$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1 (40 PUNTOS)

Aplique el método de Taylor de orden dos para aproximar la solución del siguiente problema de valores iniciales.

$$y' = 2ty + t - 2, \qquad 0 \le t \le 1$$

$$y(0) = 1, \qquad use\ h = 0.2$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Dado que $y' = f(t,y)$, determinamos $f'(t,y)$.	$f'(t,y) = \frac{d}{dt}(2ty + t - 2)$ $f'(t,y) = 2ty' + 2y + 1$ $f'(t,y) = 2t(2ty + t - 2) + 2y + 1$ $f'(t,y) = 4t^2y + 2t^2 - 4t + 2y + 1$
2.	Ahora se determina $T^{(2)}(t,y)$	$T^{(2)}(t,y) = f(t,y) + \frac{h}{2}f'(t,y)$ $T^{(2)}(t,y) = (2ty + t - 2) + \frac{(0.2)}{2}(4t^2y + 2t^2 - 4t + 2y + 1)$ $T^{(2)}(t,y) = 0.4\,t^2y + 0.2\,t^2 + 2ty + 0.2y + 0.6t - 1.9$
3.	Por último, determinamos w_{i+1}.	$w_{i+1} = w_i + h\,T^{(2)}(t_i, w_i)$ $w_{i+1} = w_i + 0.2(0.4\,t_i^2 w_i + 0.2\,t_i^2 + 2t_i w_i + 0.2w_i + 0.6t_i - 1.9)$ $w_{i+1} = 0.08\,t_i^2\,w_i + 0.04\,t_i^2 + 0.4\,t_i w_i + 0.12\,t_i + 1.04\,w_i - 0.38$
4.	Para determinar la primera aproximación, se utiliza los valores de las condiciones iniciales (en base a $t_0 = 0$, $w_0 = 1$) utilizando la expresión anterior.	$w_1 = 0.08\,t_0^2\,w_0 + 0.04\,t_0^2 + 0.4\,t_0 w_0 + 0.12\,t_0 + 1.04\,w_0 - 0.38$ $w_1 = 0.08\,(0)^2(1) + 0.04(0)^2 + 0.4\,(0)(1) + 0.12\,(0) + 1.04(1) - 0.38$ $w_1 = 0.66$

No.	Explicación	Operatoria
5.	Se continúan las siguientes iteraciones de la misma forma que en el paso 5, por lo que se obtiene:	$w_2 = 0.386912$ $w_3 = 0.143647$ $w_4 = -0.105595$ $w_5 = -0.407416$

RESPUESTA	

t	$y(t)$
0.0	1.000000
0.2	0.660000
0.4	0.386912
0.6	0.143647
0.8	−0.105595
1.0	−0.407416

TEMA 2 (30 PUNTOS)

Aplique el método de disparo lineal para aproximar la solución del siguiente problema con valores en la frontera.

$$y'' = -y' + x + 2y + 1, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad use\ h = 0.2$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Sea la ecuación diferencial expresada con la variable independiente t.	$y''(t) = -y'(t) + t + 2y(t) + 1$
2.	Expresando la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.	$y'(t) = x(t)$ $x'(t) = -x(t) + t + 2y(t) + 1$
3.	Se establecen las condiciones iniciales del sistema.	$x(0) = a$ $y(0) = 0$

4. Se toma como suposiciones $a = 1$ y $a = 2$, y aplicando el algoritmo de Runge-Kutta, se obtiene la aproximación para $y(1)$.

$$y(1)|_{a=1} = 1.434397$$

$$y(1)|_{a=2} = 2.295342$$

5. En base a las aproximaciones, se obtiene mediante interpolación de Lagrange una aproximación que coincida con la segunda condición de frontera $y(1) = 2$.

$\boldsymbol{y(1)}$	$\boldsymbol{x(0)}$
1.434397	1
2.295342	2
2	b

$$b = 1.656956$$

6. Por último, se ejecuta nuevamente el algoritmo de Runge-Kutta con las siguientes condiciones iniciales.

$$x(0) = 1.656946 \text{ y } y(0) = 0$$

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{y(t)}$
0.0	1.656956	0.000000
0.2	1.617684	0.324461
0.4	1.740062	0.657725
0.6	2.003733	1.029815
0.8	2.402341	1.468146
1.0	2.940545	2.000000

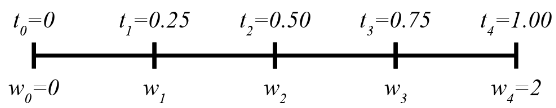
RESPUESTA

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{y(t)}$
0.0	0.000000
0.2	0.324461
0.4	0.657725
0.6	1.029815
0.8	1.468146
1.0	2.000000

TEMA 3 (30 PUNTOS)

Use el algoritmo de las diferencias finitas para aproximar la solución al siguiente problema con valores en la frontera.

$$y'' = 3(x - y), \qquad 0 \le x \le 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2, \qquad use\ h = 0.25$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se consideran los nodos x_i a analizar	$x_i = a + ih = 0 + 0.25i = 0.25i$
2.	Se aproxima las derivadas de la función mediante las fórmulas de diferencias centradas.	$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})]$ $y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})]$
3.	Además, se considera la ecuación diferencial centrada alrededor del punto x_i.	$y''(x_i) = 3[x_i - y(x_i)]$
4.	Sustituyendo la segunda derivada de $y(x_i)$ en la expresión anterior.	$\frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] = 3[x_i - y(x_i)]$
5.	Tomando en cuenta la aproximación $w_i \cong y(x_i)$ en la expresión anterior, y sustituyendo$h = 0.25$ y $x_i = 0.25i$, se llega a la ecuación en diferencias.	$\frac{1}{(0.25)^2}[w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}] = 3[0.25i - w_i]$ $16w_{i+1} - 32\,w_i + 16w_{i-1} = 0.75i - 3w_i$ $16w_{i+1} - 29\,w_i + 16w_{i-1} = 0.75i$
6.	Se consideran gráficamente cada uno de los nodos intermedios, incluyendo las condiciones de frontera.	

7.	Se plantea la ecuación en diferencias, cuando $i = 1$, considerando la condición frontera inicial.	$16w_2 - 29\,w_1 + 16w_0 = 0.75$ $16w_2 - 29\,w_1 + 16(0) = 0.75$ $\boldsymbol{-29w_1 + 16w_2 = 0.75}$
8.	Se plantea la ecuación en diferencias, cuando $i = 2$.	$16w_3 - 29\,w_2 + 16w_1 = 0.75(2)$ $\boldsymbol{16w_1 - 29\,w_2 + 16w_3 = 1.5}$
9.	Se plantea la ecuación en diferencias, cuando $i = 3$, considerando la condición frontera final.	$16w_4 - 29\,w_3 + 16w_2 = 0.75(3)$ $16(2) - 29\,w_3 + 16w_2 = 2.25$ $16w_2 - 29w_3 = 2.25 - 32$ $\boldsymbol{16w_2 - 29w_3 = -29.75}$
10.	Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.	$-29w_1 + 16w_2 = 0.75$ $16w_1 - 29\,w_2 + 16w_3 = 1.5$ $16w_2 - 29w_3 = -29.75$
11.	Se obtiene la solución del sistema de ecuaciones mediante un SAC.	$w_1 = 0.679305, \quad w_2 = 1.278116, \quad w_3 = 1.731029$

RESPUESTA

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{y(t)}$
0.0	0.000000
0.25	0.679305
0.50	1.278116
0.75	1.731029
1.0	2.000000