

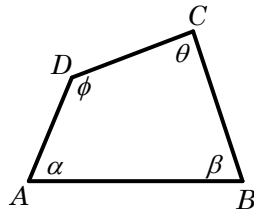
2.3 Cuadriláteros

OBJETIVOS

- Calcular el área y el perímetro del cuadrado, rectángulo, paralelogramo, rombo y trapecio.
- Resolver problemas en los cuales se involucran cuadriláteros y triángulos.
- Calcular áreas sombreadas en figuras geométricas que contienen triángulos y cuadriláteros.

Definición

Un **cuadrilátero** es una figura plana, que tiene cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos internos. Dos lados consecutivos se intersectan en un vértice formando así un ángulo interno.



Una propiedad de todos los cuadriláteros es que la suma de sus ángulos internos es igual a 360° , es decir que

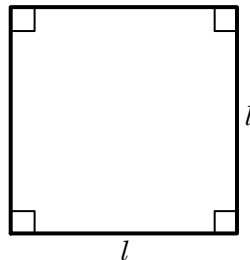
$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 360^\circ$$

La propiedad anterior se demuestra fácilmente ya que al trazar un segmento que pase por dos vértices opuestos se forman dos triángulos y como ya se ha establecido en la sección anterior la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .

Los cuadriláteros que serán estudiados en ésta sección son el cuadrado, el rectángulo, el paralelogramo, el trapecio y el rombo.

El cuadrado

El cuadrado es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales, los cuatro ángulos iguales con medida de 90° y sus lados opuestos paralelos



Las fórmulas para calcular el área y el perímetro de un cuadrado son

$$A = l^2$$

$$P = 4l$$

En algunos problemas puede ser útil calcular la diagonal d del cuadrado utilizando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}d^2 &= l^2 + l^2 \\ &= 2l^2\end{aligned}$$

Extrayendo raíz cuadrada para despejar la diagonal se tiene

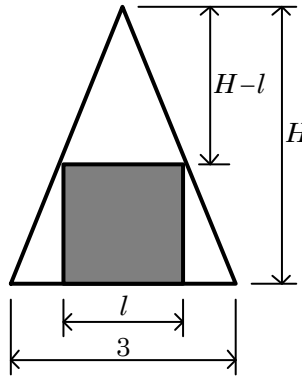
$$\begin{aligned}d &= \sqrt{2l^2} \\ d &= \sqrt{2} l\end{aligned}$$

Ejemplo 1: Un cuadrado inscrito en un triángulo

Se inscribe un cuadrado dentro de un triángulo isósceles de 3 cm en la base y lados iguales de 4 cm. El cuadrado está inscrito de tal forma que uno de sus lados está sobre la base del triángulo. Calcule el área y el perímetro del cuadrado.

Solución

La figura muestra el cuadrado inscrito en el triángulo, en donde H es la altura del triángulo y l es el lado del cuadrado



La altura H del triángulo dado se calcula utilizando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}H^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 4^2 \\ H^2 &= 16 - \frac{9}{4} = \frac{55}{4} \\ H &= \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}\end{aligned}$$

Para calcular el lado del cuadrado note que el triángulo de base l y altura $H - l$, es semejante al triángulo de base 3 y altura H . Utilizando proporcionalidad entre sus lados se tiene

$$\begin{aligned}\frac{H - l}{H} &= \frac{l}{3} \\ 3(H - l) &= Hl \\ 3H - 3l &= Hl \\ 3H &= 3l + Hl\end{aligned}$$

Factorizando l en el lado derecho y despejando l

$$\begin{aligned}3H &= l(3 + H) \\ l &= \frac{3H}{3 + H}\end{aligned}$$

Sustituyendo $H = \frac{\sqrt{55}}{2}$ se obtiene que

$$l = \frac{3\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)}{3 + \frac{\sqrt{55}}{2}} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)}{\frac{6 + \sqrt{55}}{2}} = \frac{3\sqrt{55}}{6 + \sqrt{55}}$$

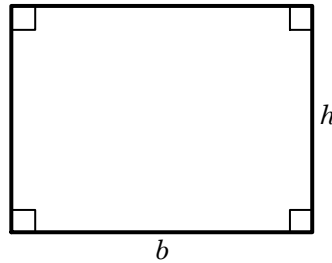
Ahora ya se puede calcular el área y el perímetro del cuadrado

$$A = l^2 = \left(\frac{3\sqrt{55}}{6 + \sqrt{55}}\right)^2 = \frac{9(55)}{(6 + \sqrt{55})^2} = \frac{495}{36 + 12\sqrt{55} + 55} = \frac{495}{91 + 12\sqrt{55}} \approx 2.75 \text{ cm}^2$$

$$P = 4l = 4\left(\frac{3\sqrt{55}}{6 + \sqrt{55}}\right) = \frac{12\sqrt{55}}{6 + \sqrt{55}} \approx 6.63 \text{ cm}$$

El rectángulo

Es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos iguales y paralelos y todos sus ángulos internos miden 90° . En la figura siguiente se muestra un rectángulo de base b y altura h .



Las fórmulas para calcular el área y el perímetro de un rectángulo son

$$A = bh$$

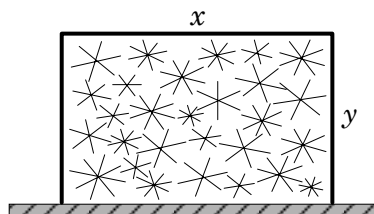
$$P = 2b + 2h$$

Ejemplo 2: Cercado de un terreno

Un agricultor quiere construir una hortaliza rectangular de con un área de 112 metros cuadrados para sembrar lechugas. Si dispone de 30 metros lineales de material de cercado y quiere aprovechar una pared ya construida como uno de los lados. Determine las dimensiones que debe tener la hortaliza.

Solución

Sean x y y las dimensiones de la hortaliza, como se muestra en la figura siguiente



Como el terreno es rectangular se tiene que el área es

$$A = xy$$

$$112 = xy$$

Los 30 metros de material de cercado serán utilizados para cercar únicamente 3 de los lados del rectángulo ya que donde se encuentra la pared no será necesario cercar, entonces

$$x + 2y = 30$$

Despejando x de la última ecuación se obtiene

$$x = 30 - 2y$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando y

$$112 = (30 - 2y)y$$

$$2y^2 - 30y + 112 = 0$$

$$y^2 - 15y + 56 = 0$$

$$(y - 8)(y - 7) = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $y = 8$ y $y = 7$.

Si $y = 8$ se obtiene que $x = 30 - 2(8) = 14$

Si $y = 7$ se obtiene que $x = 30 - 2(7) = 16$

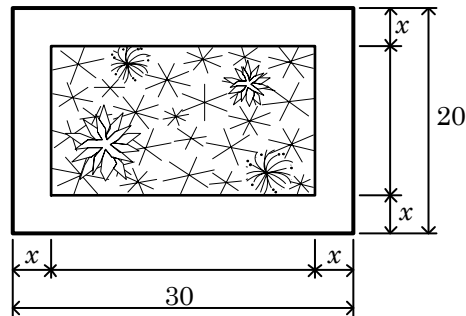
Respuesta: Se puede construir la hortaliza de dos formas: largo 16 m y ancho 7 m o bien largo 14 m y ancho 8 m.

Ejemplo 3: Construcción de un jardín

En un terreno rectangular de 30 pies de largo por 20 pies de ancho se quiere construir un jardín rectangular que tenga un área de 336 pies². El jardín debe estar rodeado de un corredor de ancho constante para que se pueda caminar alrededor del mismo. Determine el ancho del corredor.

Solución

Sea x el ancho del corredor rectangular, como se muestra en la figura



El área del jardín puede expresarse en términos de x ya que el largo es $30 - 2x$ y el ancho es $20 - 2x$. Como el área del jardín se sabe que es 336 pies² se obtiene la ecuación siguiente

$$(30 - 2x)(20 - 2x) = 336$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtendrá el ancho del corredor. Desarrollando el producto e igualando a cero

$$600 - 60x - 40x + 4x^2 = 336$$

$$4x^2 - 100x + 264 = 0$$

Dividiendo ambos lados entre 4 y factorizando el lado izquierdo

$$x^2 - 25x + 66 = 0$$

$$(x - 22)(x - 3) = 0$$

De donde las soluciones de la ecuación son $x = 22$ y $x = 3$.

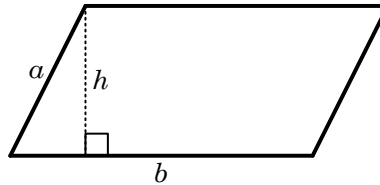
El ancho del corredor no puede ser 22 pies ya que se sobrepasan las dimensiones del terreno.

Respuesta: El ancho del jardín es de 3 pies.

El paralelogramo y el rombo

El paralelogramo

Es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos y sus lados opuestos iguales. En la figura siguiente se muestra un paralelogramo de lados a y b , y altura h .



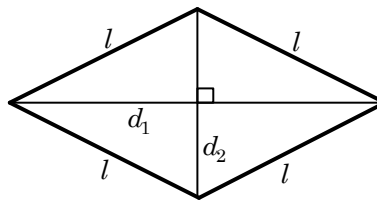
El área y el perímetro del paralelogramo son

$$A = bh$$

$$P = 2a + 2b$$

El rombo

El rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales y sus lados opuestos paralelos. En un rombo es usual referirse a sus diagonales ya que éstas son perpendiculares entre sí. La figura muestra un rombo de lados l y diagonales d_1 y d_2 .



El área y el perímetro del rombo son

$$A = \frac{d_1 d_2}{2}$$

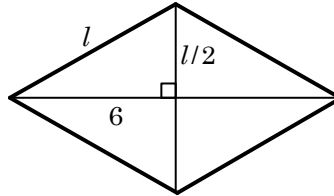
$$P = 4l$$

Ejemplo 4: Área de un rombo

La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que sus lados y la diagonal mayor mide 12 cm. Encontrar el área del rombo

Solución

Si la diagonal menor tiene la misma longitud que los lados, entonces dos lados consecutivos y la diagonal menor forman un triángulo equilátero como se muestra en la figura, en donde l es la longitud de los lados y la diagonal menor.



La altura del triángulo equilátero mide 6 cm ya que es la mitad de la diagonal mayor, la cual mide $d_1 = 12$

Utilizando el teorema de Pitágoras para calcular l se tiene

$$l^2 = 6^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = 36$$

$$\frac{3l^2}{4} = 36$$

$$l = \sqrt{\frac{(36)(4)}{3}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

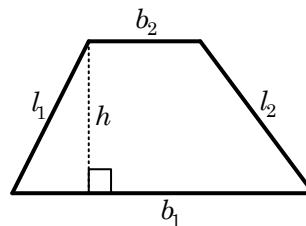
La longitud de la diagonal menor es $d_2 = l = 4\sqrt{3}$

Ahora se calcula el área del rombo pues se conoce la longitud de las dos diagonales

$$A = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{(12)(4\sqrt{3})}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

El Trapecio

Es un cuadrilátero que tiene dos de sus lados opuestos paralelos y los otros lados opuestos no paralelos. A los lados paralelos usualmente se les llama base 1 (b_1) y base 2 (b_2). Si los lados no paralelos tienen la misma longitud al trapecio se le llama isósceles. La altura h del trapecio es el segmento perpendicular a los lados paralelos



Las ecuaciones para calcular el área y el perímetro del trapecio son

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

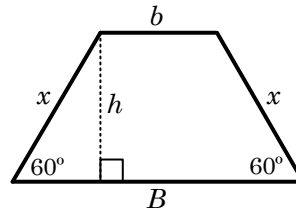
$$P = b_1 + b_2 + l_1 + l_2$$

Ejemplo 5: Dimensiones de un trapecio

Un trapecio isósceles tiene área de $18\sqrt{3}$ cm² y perímetro de 24 cm. Si dos de los ángulos iguales tienen medida de 60° , calcule las dimensiones de los lados y la altura del trapecio

Solución

Sea x la longitud de los lados iguales, B y b las longitudes de los lados paralelos y h la altura del trapecio como se muestra en la figura

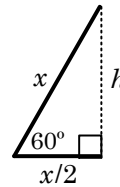


Como se conoce el área y el perímetro del trapecio, se puede escribir las ecuaciones

$$A = \frac{1}{2}h(B + b) = 18\sqrt{3}$$

$$P = B + b + 2x = 24$$

Es claro que solamente con estas dos ecuaciones, no se puede resolver el problema pues hay cuatro incógnitas. Observe que utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se muestra a continuación se puede expresar B y h en términos de x y b .



El cateto adyacente es igual a $x/2$ pues el triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

La base B puede expresarse como

$$B = b + 2\left(\frac{x}{2}\right) = b + x$$

Reemplazando las expresiones obtenidas en la ecuación del área

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)(b + x + b) = 18\sqrt{3}$$

$$x(2b + x) = 72$$

Reemplazando las expresiones en la fórmula del perímetro

$$(b + x) + b + 2x = 24$$

$$2b + 3x = 24$$

Despejando b de la última ecuación

$$2b = 24 - 3x$$

$$b = \frac{24 - 3x}{2}$$

Sustituyendo b en la ecuación $x(2b + x) = 72$ se obtiene una ecuación de una variable

$$x\left(2\left(\frac{24 - 3x}{2}\right) + x\right) = 72$$

Resolviendo la ecuación se encuentra el valor de x

$$x(24 - 3x + x) = 72$$

$$24x - 2x^2 - 72 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 0$$

$$x = 6$$

Si $x = 6$

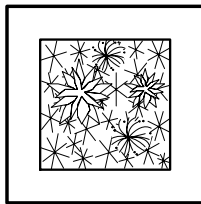
$$b = \frac{24 - 3x}{2} = \frac{24 - 3(6)}{2} = 3$$

$$B = b + x = 3 + 6 = 9$$

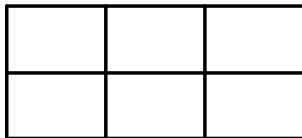
Por lo tanto las dimensiones del trapecio son base mayor 9 cm, base menor 3 cm y lados iguales 6 cm.

Ejercicios de la sección 2.3

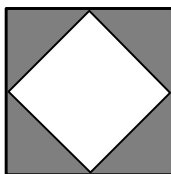
- Encuentre el lado de un cuadrado que tenga cuatro veces el área de un cuadrado de lado 2 cm.
- Encuentre el lado de un cuadrado que tenga perímetro igual a cuatro veces el perímetro de un cuadrado de lado 2 cm.
- Una foto cuadrada de 6 pulgadas por lado se ha de colocar en un marco cuadrado como se muestra en la figura. Si el área que rodea la fotografía es igual al área de la foto. Calcule el lado del marco.
- La suma de los perímetros de dos cuadrados es 60 cm y la suma de sus áreas es 125 cm². Determine las dimensiones de cada cuadrado.
- Un terreno rectangular tiene 30 metros de largo y 375 metros cuadrados de área. Calcule el ancho del terreno.
- La sala rectangular de una casa tiene el doble de largo que de ancho. Si el perímetro de la sala es 18 m. Calcule sus dimensiones.
- Se va a construir una bodega rectangular de 60 pies de ancho por 80 pies de largo. La municipalidad exige que el área verde que rodea la bodega sea el 50% del área de la bodega. Si el área que rodea la bodega tiene el mismo ancho en cada lado, determine las dimensiones del terreno rectangular donde se puede construir la bodega.
- Encontrar la base y la altura de un rectángulo de área 35 cm² y perímetro 24 cm.
- Un granjero compró 100 m de material para cercar un terreno rectangular de 544 m² de área. Determine las dimensiones del terreno.



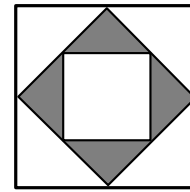
10. Un granjero compro 200 metros de cerca para cerrar un terreno rectangular. El granjero utilizará una pared ya existente como uno de los lados del terreno, de manera que solo debe cercar 3 lados. Encuentre el área del terreno si el lado angosto medirá la mitad del lado ancho.
11. Un terreno rectangular de 24 pies de ancho por 32 pies de largo está rodeado de una banqueta de ancho uniforme. Si el área de la banqueta es de 512 pies cuadrados, calcule el ancho de la banqueta.
12. Una cartulina de 20 pulgadas de ancho por 32 pulgadas de alto será utilizada para colocar un cartel. El margen en la parte superior e inferior será el doble que el margen en los lados. Encuentre el ancho de los márgenes si la parte impresa tendrá un área de 330 pulgadas cuadradas.
13. En un jardín cuadrado se van a sembrar rosas y luego será cercado por todo su borde. Si el costo de la cerca es de Q12 por metro lineal y el costo por sembrar las rosas es de Q12 por metro cuadrado, Determine el lado del jardín que se puede construir si el costo total es de Q826.
14. Un constructor dispone de 73 metros lineales de tabla yeso que debe utilizar para construir 6 oficinas rectangulares iguales en un terreno rectangular de 105 m^2 de área, como se muestra en la figura. Determine las dimensiones de cada oficina.



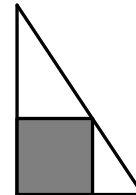
15. Se inscribe un cuadrado dentro de otro cuadrado de lado 6 cm, como se muestra en la figura. Si los vértices del cuadrado inscrito coinciden con los puntos medios de los lados del cuadrado circunscrito, calcule el área sombreada.



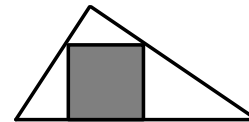
16. La figura muestra 3 cuadrados, uno inscrito dentro del otro, de manera que los vértices del cuadrado inscrito coinciden con el punto medio de los lados del cuadrado circunscrito. Si el lado del cuadrado mayor es 6 cm. Calcule el área sombreada.



17. Se inscribe un cuadrado dentro de un triángulo rectángulo de 4 cm en la base por 6 cm de altura, como se muestra en la figura. Determine el área del cuadrado.

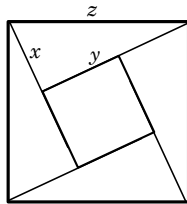


18. Se inscribe un cuadrado dentro de un triángulo rectángulo con catetos de 4 cm y 6 cm de longitud, como se muestra en la figura. Determine el área del cuadrado.



19. Encontrar el área de un rombo cuyas diagonales miden 9 cm y 12 cm.
20. El área de un rombo mide 64 cm^2 . Encontrar la medida de sus diagonales sabiendo que están en razón 2 a 1.
21. En un trapecio isósceles la longitud de los lados iguales es un medio de la longitud de la base, mientras que la altura es un tercio de la longitud de la base. Si el perímetro del trapecio es 60 cm. Calcule el área del trapecio.
22. Un trapecio isósceles tiene ángulos iguales de 45° , si la longitud de la base mayor es 20 cm y la de la base menor es 12 cm. Calcule el área y el perímetro del trapecio.
23. Un trapecio tiene base menor de 5 cm y altura de 3 cm. Si el área del trapecio es de 33 cm^2 . Calcule la base mayor del trapecio.
24. Los ángulos en la base de un trapecio isósceles miden 45° . La base mayor mide 12 cm y la base menor mide 6 cm. Encontrar el área del trapecio.
25. Un trapecio de área 100 tiene bases de 6 y 14 unidades, respectivamente. Encontrar el área de los dos triángulos que se forman cuando se prolongan los dos lados no paralelos hasta intersectarse.

26. En un triángulo equilátero cuyos lados miden 8 cm, se traza un segmento paralelo a uno de sus lados de tal manera que se forma un trapecio isósceles cuyos lados no paralelos miden 4 cm. Encontrar el área del trapecio.
27. En un trapecio los lados paralelos miden 25 cm y 4 cm. Si los lados no paralelos miden 20 cm y 13 cm. Calcule el área del trapecio.
28. La suma de las áreas de un cuadrado y un triángulo equilátero es 60 cm^2 y la suma de sus perímetros es 40 cm. Determine el lado del cuadrado y el lado del triángulo equilátero.
29. En la figura que se muestra un cuadrado de lado z que contiene en su interior cuatro triángulos rectángulos iguales y un cuadrado. Si las longitudes de los catetos de cada triángulo son x y y . Utilice el hecho de que el área del cuadrado exterior es igual a la suma del área del cuadrado interior más el área de los cuatro triángulos para demostrar el teorema de Pitágoras, es decir que $z^2 = x^2 + y^2$



30. Calcule el área del trapecio $MNPQ$ de dos maneras diferentes para demostrar el teorema de Pitágoras, es decir que $c^2 = a^2 + b^2$

