

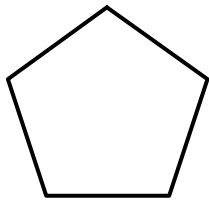
2.5 Polígonos regulares

OBJETIVOS

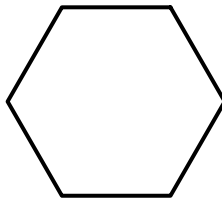
- Calcular el área y el perímetro de polígonos regulares.
- Calcular áreas sombreadas en figuras geométricas que involucren polígonos regulares.

Definición

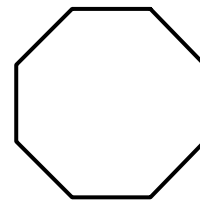
Un polígono regular de n lados es una figura plana formada por n segmentos que se intersecan dos a dos formando una figura con n vértices, n ángulos iguales y n lados iguales. La figura siguiente muestra tres polígonos regulares, un pentágono, un hexágono y un octágono.



Pentágono



Hexágono



Octágono

Lado de un polígono regular

Es el segmento que tiene como puntos extremos dos vértices del polígono y se representa con la letra l .

Centro de un polígono regular

Se llama centro de un polígono regular al centro común de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

Radio de un polígono regular

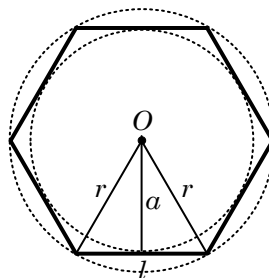
El radio de un polígono regular es el radio de su circunferencia circunscrita.

Apotema de un polígono regular

Se llama apotema de un polígono regular al radio de su circunferencia inscrita y se representa con la letra a .

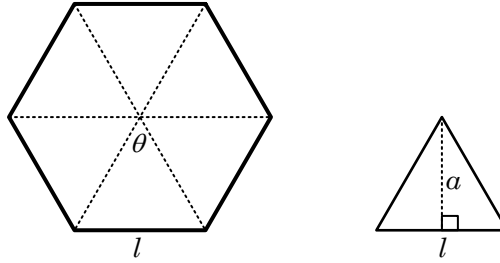
Ángulo central de un polígono regular

Es el ángulo que tiene como vértice el centro del polígono y sus lados son los segmentos que contienen a dos vértices consecutivos. La medida del ángulo central es $\theta = \frac{360}{n}$.



Área y perímetro de un polígono

Para calcular el área de un polígono, se puede suponer que éste está formado por n triángulos iguales, como se muestra en la figura siguiente.



La base de cada triángulo es el lado l del polígono y la altura es el apotema a , entonces el área de cada triángulo es

$$A_n = \frac{1}{2}(l)(a)$$

Como el polígono tiene n triángulos se tiene que las expresiones para calcular el área y el perímetro son

$$A = \frac{1}{2}nla$$

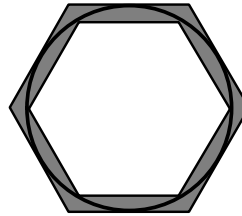
$$P = nl$$

Ejemplo 1: Hexágono inscrito y circunscrito a una circunferencia

Un hexágono está inscrito y otro hexágono está circunscrito a una circunferencia de radio 6 cm. Encuentre el área de la región que se encuentra entre los dos hexágonos.

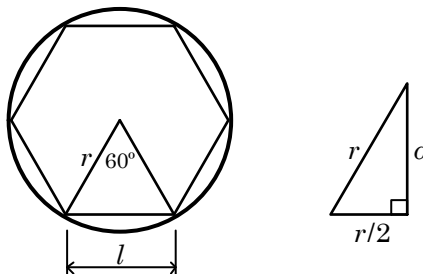
Solución

La figura muestra el área de la región buscada



El área sombreada es el área del hexágono circunscrito menos el área del hexágono inscrito.

Para calcular el área del hexágono circunscrito considere la figura siguiente, en donde se ha ampliado el triángulo rectángulo para mostrar los elementos.



La medida del ángulo central es $\theta = \frac{360}{6} = 60^\circ$

Como el triángulo es equilátero se tiene que $l = r$. El apotema se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras

$$a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

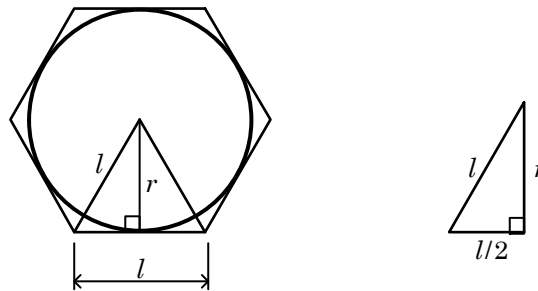
$$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3}$$

Entonces el área del hexágono inscrito es

$$A_I = \frac{1}{2}nla = \frac{1}{2}(6)(6)(3\sqrt{3}) = 54\sqrt{3}$$

Para el hexágono circunscrito los elementos se muestran en la figura siguiente



Para este hexágono la apotema es igual al radio y se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular l

$$r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = r^2$$

$$\frac{3l^2}{4} = r^2$$

$$l = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}(6) = 4\sqrt{3}$$

Entonces el área del hexágono circunscrito es

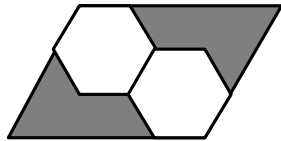
$$A_S = \frac{1}{2}nla = \frac{1}{2}(6)(4\sqrt{3})(6) = 72\sqrt{3}$$

Finalmente, el área sombreada es

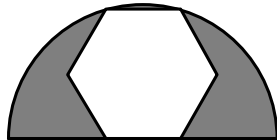
$$\begin{aligned} A &= A_S - A_I \\ &= 72\sqrt{3} - 54\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 2.5

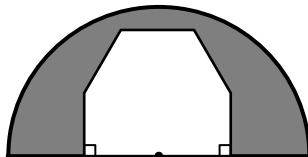
- Encuentre el área y el perímetro de un hexágono si su lado mide 6 cm.
- Encuentre el área de un hexágono si su apotema es igual a 12 cm.
- Si un triángulo equilátero y un hexágono tienen perímetros iguales de 18 cm. Encuentre la razón de sus áreas.
- Si el área de un hexágono es igual a $150\sqrt{3}$ encuentre el lado y la apotema.
- Si un hexágono tiene apotema de $3\sqrt{3}$, encuentre el perímetro de la circunferencia circunscrita.
- Si el área de un hexágono regular es $48k^2\sqrt{3}$, donde k es una constante. Encuentre la razón de las áreas de los círculos inscrito y circunscrito.
- En la figura el lado del hexágono mide 2 cm. Encuentre el área sombreada.



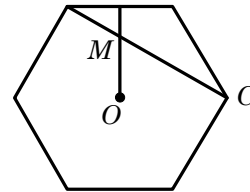
- Se inscribe un hexágono regular en una semicircunferencia de radio 6 cm. Encuentre el área sombreada.



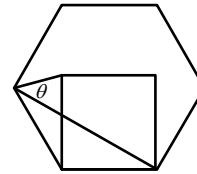
- La entrada a una mina está formada por una semicircunferencia de 4 metros de radio y una puerta de acceso que tiene una altura en el centro de 3 metros. Si los 5 lados que forman la puerta tienen la misma longitud y los ángulos en las esquinas superiores tienen una medida de 120° , calcule el área sombreada.



- Encontrar el lado de un hexágono regular cuya área es igual a la de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 36 cm.
- En la figura se muestra un hexágono con centro en el punto O . Si la longitud del segmento MC es 8 cm. Encuentre el área del hexágono.



- La figura muestra un cuadrado dentro de un hexágono, de forma que el lado del hexágono es igual al lado del cuadrado. Calcule el ángulo θ



- El área de un polígono regular mide 100 cm^2 y su perímetro mide 20 cm. ¿Cuánto mide su apotema.
- Un triángulo equilátero, un hexágono, un cuadrado y un círculo tienen área de 100 cm^2 . Calcule que figura tiene el mayor perímetro.
- La figura muestra un octágono inscrito en un cuadrado. Si el área del octágono es 100 cm^2 .
 - Calcule el valor de x .
 - Calcule el área del cuadrado.

